Les fonctions en première L

Définition d'une fonction numérique de la variable réelle

Définir une fonction *f* sur l'ensemble $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$, c'est donner un procédé, qui à chaque nombre réel $x \in \mathcal{D}_f$, fait correspondre un nombre réel unique noté *f(x)* qui est l'image de *x* par la fonction *f*.

Une fonction $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$
$x \mapsto y = f(x)$

est déterminée par :

• La **variable** *x* et son **image** *f(x)*.

• L'association reliant *x* à *f(x)*. Pour les fonctions numériques de la variable réelle, il s'agit la plupart du temps d'une formule de calcul.

• **L'ensemble de définition de *f*** : C'est la partie $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}$ qui contient tous les réels *x* pour lesquels *f(x)* existe.

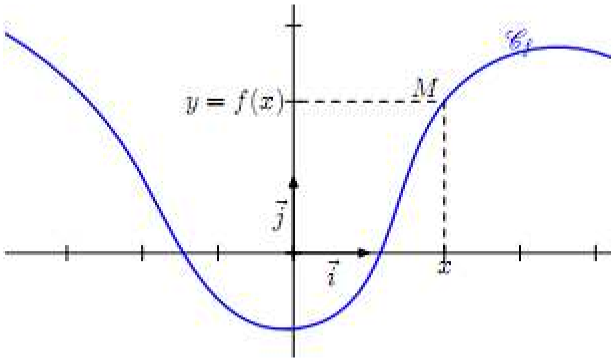
Exemple :
Si *f* est la fonction « carré ». Elle définie sur $\mathbb{R}$ par la formule $f(x) = x^2$.
3 a pour image $f(3) = 3^2 = 9$
-3 a pour image $f(-3) = (-3)^2 = 9$
On remarque que 3 et -3 ont la même image par la fonction *f*. C'est normal, car deux nombres opposés ont le même carré !
On dit alors que 9 a pour **antécédents** les nombres 3 et -3.
De même :
0 a un seul antécédent : 0
-2 n'a pas d'antécédent, car aucun nombre négatif ne peut être le carré d'un nombre réel.

De façon générale :
Dire que *x* est l'antécédent de *y* par *f*, c'est dire que *y* est l'image de *x* par *f*, c'est à dire que $y = f(x)$.

Remarques :
Tout réel *x* appartenant à l'ensemble de définition d'une fonction *f* possède une image unique *f(x)*.
Mais, réciproquement, un réel peut posséder aucun, un seul ou plusieurs antécédents par la fonction *f*.
Trouver les antécédents d'un réel *y* par la fonction *f*, c'est résoudre l'équation : $y = f(x)$ où *x* est l'inconnue.

Représentation graphique d'une fonction dans un repère

Si *f* est une fonction définie sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$, la représentation graphique de la fonction *f* dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;y)$ où $x \in \mathcal{D}_f$ et $y = f(x)$.



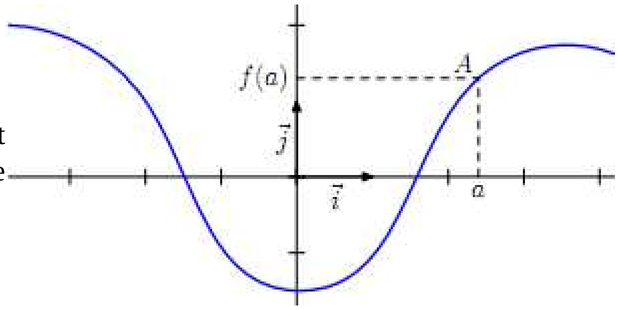
En résumé:
Si *f* est une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ a pour représentation graphique la courbe $\mathscr{C}_f$, ,alors, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a :

$M \in \mathscr{C}_f$ équivaut à : $M(x\,;f(x))$.

Remarque :
La représentation graphique de la fonction *f* dans un repère est souvent appelée « ***Courbe représentative de la fonction f*** » et même parfois « ***Courbe de f*** » y compris dans les cas où la représentation graphique de *f* est une droite ou une ligne brisée formée de segments de droites.

Lecture graphique des images et des antécédents. Équations et inéquations.

Si f est une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$ et a pour représentation graphique la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, on a:



• L'image *f(a)* du réel a$\in\mathscr{D}_f$ par la fonction *f*, est l'ordonnée du point A d'abscisse a de la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f.

Réciproquement:

• Un antécédent de $a\in\mathbb{R}$ par la fonction *f* (s'il existe), est un nombre $x\in\mathscr{D}_f$ tel que $f(x)=a$, c'est donc l'abscisse de l'un des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ dont l'ordonnée est a.

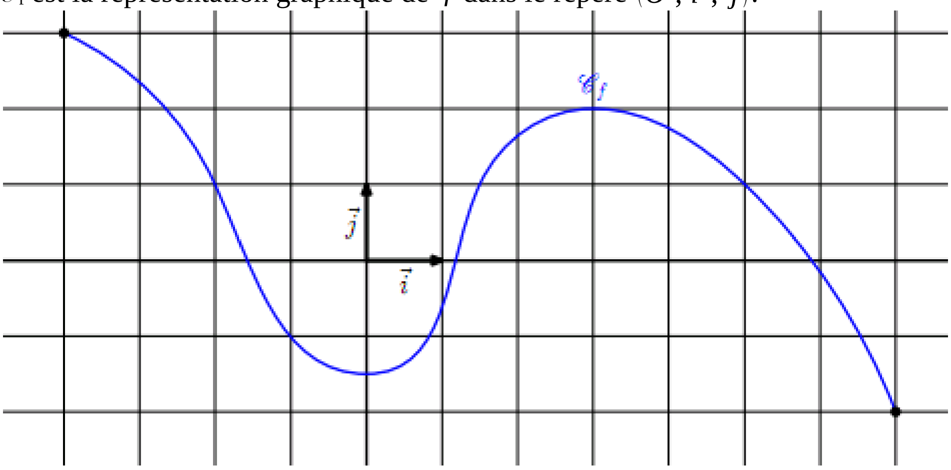
• Les solutions de l'équation $f(x)=a$ sont les antécédents du nombre $a\in\mathbb{R}$ par la fonction *f*. Pour déterminer graphiquement les solutions de cette équation on cherche les abscisses des points communs la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y=a$.

• Les solutions de l'inéquation $f(x)\leqslant a$ sont les antécédents par la fonction *f* des nombres inférieurs ou égaux à *a*. Ce sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ dont les ordonnées sont inférieures ou égales à *a*.

Regardons cela sur un exemple:

L'ensemble de définition de la fonction f est $[-4\,;7]$.

La courbe $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique de f dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.



• L'équation $f(x)=2{,}5$ a une unique solution sur $[-4\,;7]$ car un seul point de $\mathscr{C}_f$ a pour ordonnée 2,5 : il s'agit du point qui a pour abscisse environ $-3{,}3$.

La solution cherchée est donc $x\approx-3{,}3$. Le nombre 2,5 a un seul antécédent qui est environ $-3{,}3$.

• L'équation $f(x)=1$ a trois solutions car il y a trois points de $\mathscr{C}_f$ qui ont pour ordonnée 1 : les points d'abscisses -2 ; 1,5 et 5.

L'ensemble des solutions est:$\{-2\ ;1{,}5\ ;5\}$. Le nombre 1 possède trois antécédents: -2; 1,5; 5..

• L'équation $f(x)=-3$ n'a pas de solution car la courbe $\mathscr{C}_f$ n'a pas de point ayant -3 pour ordonnée. Le nombre -3 n'a pas d'antécédents.

• Les équations $f(x)=2$ et $f(x)=-1;5$ ont chacune deux solutions. Les nombres 2 et $-1{,}5$ ont chacun deux antécédents.

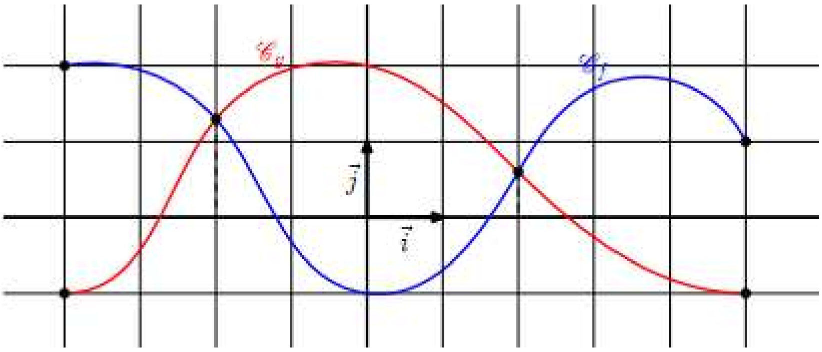
• L'inéquation $f(x)\geqslant 1$ a pour ensemble de solutions $[-4\,;-2]\cup[1{,}5\,;5]$ car tous les points de la courbe ayant une ordonnée supérieure ou égale à 1 ont leur abscisse appartenant à la réunion des deux intervalles $[-4\,;-2]$ et $[1{,}5\,;5]$.

• L'inéquation $f(x)<1$ a pour ensemble de solutions $]-2\,;1{,}5[\cup]5\,;7]$ car tous les points de la courbe ayant une ordonnée inférieure à 1 ont leur abscisse appartenant à la réunion des deux intervalles $]-2\,;1{,}5[$ et $]5\,;7]$.

Lecture graphique des solutions d'équations et d'inéquations en présence de deux fonctions.

Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=g(x)$ c'est trouver les abscisses des points d'intersection des représentations graphiques $\mathscr{C}_f$ de la fonction f et $\mathscr{C}_g$ de la fonction g.
Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)<g(x)$ c'est trouver les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés en dessous de $\mathscr{C}_g$.

Exemple:
Dans le repère ci-dessous, on a tracé les représentations graphiques de deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-4;5]$.



Les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$: il y a donc deux solutions: $x=-2$ ou $x=2$.
Les solutions de l'inéquation $f(x)\leqslant g(x)$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés en dessous (ou sur) $\mathscr{C}_g$: L'ensemble des solutions est donc l'intervalle $[-2;2]$.

Sens de variation d'une fonction

La fonction *f* doit être définie sur un *intervalle* *I* de $\mathbb{R}$ (qui peut bien sûr être $\mathbb{R}$ en entier).

• *f* est croissante sur l'intervalle *I* signifie:
Pour tout $a\in I$ et $b\in I$ tels que $a\leqslant b$, alors on a : $f(a)\leqslant f(b)$.
C'est à dire que les images de deux réels quelconques sont rangées dans le même ordre que ces deux réels.

• *f* est strictement croissante sur l'intervalle *I* signifie:
Pour tout $a\in I$ et $b\in I$ tels que $a<b$, alors on a : $f(a)<f(b)$.

• *f* est décroissante sur l'intervalle *I* signifie:
Pour tout $a\in I$ et $b\in I$ tels que $a\leqslant b$, alors on a : $f(a)\geqslant f(b)$.
C'est à dire que les images de deux réels quelconques sont rangées dans l'ordre inverse de ces deux réels.

• *f* est strictement décroissante sur l'intervalle *I* signifie:
Pour tout $a\in I$ et $b\in I$ tels que $a<b$, alors on a : $f(a)>f(b)$.

• *f* est constante sur l'intervalle *I* signifie:
Pour tout $a\in I$ et $b\in I$, on a : $f(a)=f(b)$

• Une fonction est appelée *monotone sur un intervalle I*, lorsqu'elle est croissante sur I ou bien décroissante sur I.

Par exemple, la fonction carré n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$ car elle est croissante sur $[0;+\infty[$, mais elle est décroissante sur $]-\infty;0]$. Elle est donc monotone sur $[0;+\infty[$ et sur $]-\infty;0]$, mais pas sur la réunion de ces deux intervalles.

Étudier les variations d'une fonction, c'est déterminer les intervalles de monotonie, c'est à dire les intervalles sur lesquels la fonction est monotone. Les conclusions de cette enquête sont résumées dans le tableau des variations de la fonction.

Exemple : Tableau des variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f	$\searrow$	0	$\nearrow$

Extremum : Maximum - Minimum

Si f est une fonction définie sur un intervalle I:

• S'il existe $a \in I$ tel que, pour tout $x \in I$, on ait: $f(x) \leqslant f(a)$, on dit que *f(a)* est le maximum de f sur I ou que f admet un maximum sur I en $x=a$.

• S'il existe $a \in I$ tel que, pour tout $x \in I$, on ait: $f(x) \geqslant f(a)$, on dit que *f(a)* est le minimum de f sur I ou que f admet un minimum sur I en $x=a$.

Exemples :

La fonction *f est* définie sur $[0\,;1]$ par $f(x)=3-x$. Sur $[0\,;1]$ f a pour minimum : $f(1)=2$ et pour maximum : $f(0)=3$. En effet pour tout $x \in [0\,;1]$, on a : $2 \leqslant f(x) \leqslant 3$.

La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^2$ a pour minimum $g(0)=0$ car pour tout $\in \mathbb{R}$, on a: $g(x) \geqslant 0$, mais n'a pas de maximum sur $\mathbb{R}$.

Fonctions affines

Définition

Une fonction affine f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=mx+p$ où m et p sont des réels donnés.

Représentation graphique

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la représentation graphique d'une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=mx+p$ est la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=mx+p$ *d'ordonnée à l'origine* $p=f(0)$

Propriété caractéristique des fonctions affines

> f est une fonction affine si et seulement si, quels que soient les réels a et b, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est constant.

Plus précisément, si $f(x)=mx+p$, alors, ce nombre constant $m=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est le *coefficient directeur* de la droite $\mathscr{D}$ représentative de la fonction f.

Fonctions affines particulières:

• Si $p=0$, la fonction f définie par $f(x)=mx$ est *linéaire*.

Dans ce cas *f(x)* est proportionnel x (m est le coefficient de proportionnalité).

Les graphiques des fonctions linéaires sont des droites qui passent par l'origine du repère . Elles ont pour équation: $y=mx$.

• Si $m=0$, la fonction f définie par $f(x)=p$ est *constante* .

Les graphiques des fonctions constantes sont des droites parallèles à l'axe des abscisses . Elles ont pour équation: $y=p$.

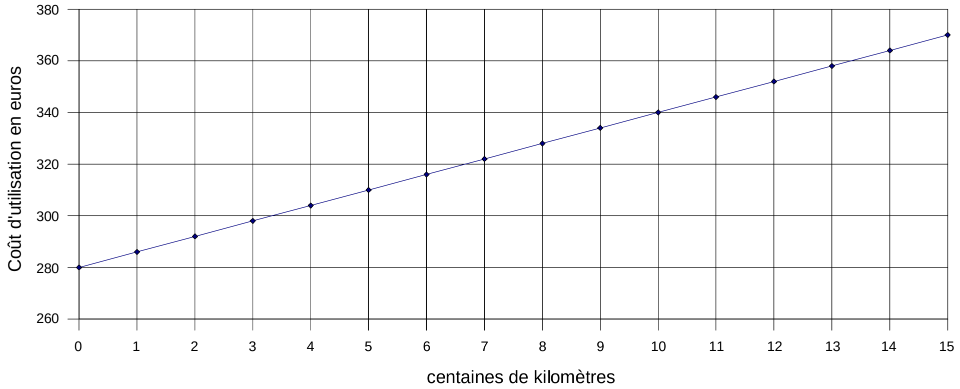
Sens de variation

f étant une fonction affine de coefficient directeur m.

• Si $m>0$, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
• Si $m<0$, la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
• Si $m=0$, la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

Étude d'un exemple de synthèse:

Une personne souhaite louer un véhicule pendant une semaine. Il hésite entre un véhicule « Essence » ou un véhicule « Diesel ».
Le coût d'utilisation du véhicule pendant cette semaine est composé du prix fixe de la location et du coût du carburant qui lui, dépend du nombre de kilomètres parcourus.
Le graphique ci-dessous donne le coût d'utilisation (exprimé en €) en fonction du nombre de centaines de kilomètres pour un véhicule « Diesel ».

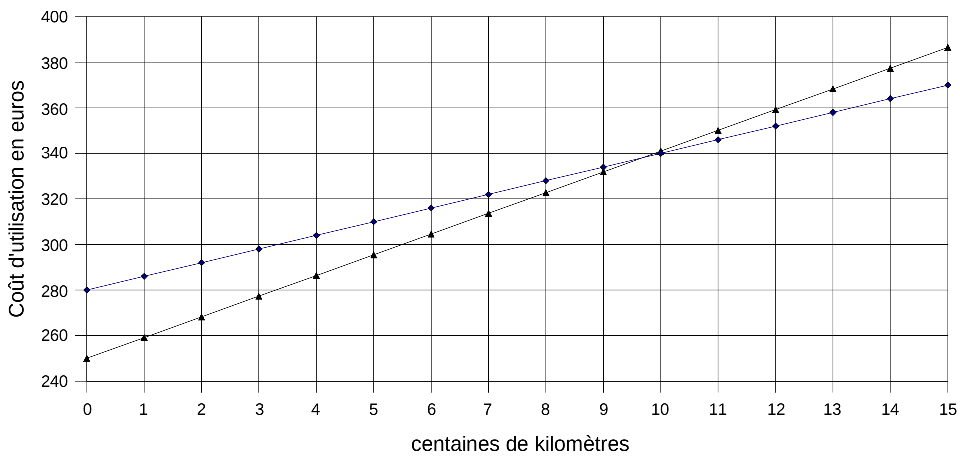


Par lecture graphique, un trajet de 600 km coûte environ 315 € car le point d'abscisse 6 (600km) de la courbe (droite) a pour ordonnée 315 environ.
Les points étant alignés, on peut en déduire que la fonction représentée ci-dessus est affine. Sa formule est de la forme $f(x)=mx+p$ avec pour ordonnée à l'origine $p=f(0)=280$. Son coefficient directeur $m=\dfrac{f(10)-f(0)}{10-0}=\dfrac{340-280}{10}=6$. La formule est donc: $f(x)=6x+280$.

Pour un véhicule « Essence », le prix de la location pour une semaine est de 250 €.
La consommation de ce carburant est de 7 litres d'essence pour 100 kilomètres parcourus.
Le prix de l'essence est de 1,30 € par litre. On a donc un coût du carburant de $7\times 1{,}30\text{ €}=9{,}10\text{ €}$ tous les 100 km.
On appelle g la fonction qui, au nombre x de centaines de kilomètres parcourus par un véhicule « Essence », associe le coût d'utilisation $g(x)$ en €. On a $g(0)=250$ auquel on additionne tous les 100 km la somme de 9,10 €, soit après x centaines de km: $9{,}1\,x$. On obtient donc la fonction affine : $g(x)=9{,}1\,x+250$.
Le raisonnement général ci-dessus est confirmé par le tableau de valeurs:

centaines de kilomètres	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Coût d'utilisation en euros	250	259,1	268,2	277,3	286,4	295,5	304,6	313,7	322,8	331,9	341	350,1	359,2	368,3	377,4	386,5

Complétons le graphique avec celui de la fonction g:



On voit que le graphique de g est en dessous de celui de f pour les nombres compris entre 0 et a où $a\approx 6{,}7$ est l'abscisse du point d'intersection des deux droites représentatives de f et de g. Donc pour $x<a$, on a: $g(x)<f(x)$. Conclusion: si la personne parcours moins de 670 km environ, il a intérêt à louer la voiture à essence. On peut trouver la valeur exacte du nombre a en résolvant l'équation $f(x)=g(x)$, c'est à dire: $6x+280=9{,}1\,x+250$. On obtient: $3{,}1\,x=30$. D'où: $x=\dfrac{300}{31}\approx 9{,}68$