

## Pourcentages

### Pourcentages et proportions

Un ensemble E contient  $n$  éléments et une de ses parties P en contient  $k$ .

La fraction  $\frac{k}{n}$  représente la proportion d'éléments de la partie P dans l'ensemble E.

Cette fraction peut s'exprimer sous la forme du pourcentage  $t\%$  tel que  $\frac{k}{n} = \frac{t}{100}$

Exemple:

Il y a 17 filles dans une classe de 32 élèves. La proportion de filles dans la classe est  $\frac{17}{32}$ .

$\frac{17}{32} = 0,53125 \approx 53\%$ . Il y a donc environ 53% de filles dans cette classe.

Quelques proportions utiles à retenir:

$$\frac{1}{2} = 0,5 = 50\% \quad , \quad \frac{1}{4} = 0,25 = 25\% \quad , \quad \frac{3}{4} = 0,75 = 75\% \quad , \quad \frac{1}{5} = 0,2 = 20\% \quad , \quad \frac{1}{3} \approx 0,3333 = 33,33\%$$

### Opérateur pourcentage (pourcentage instantané)

Prendre  $t\%$  d'une quantité Q, c'est la multiplier par  $\frac{t}{100}$ .

Exemple:

Dans un magazine de 180 pages, 30% sont des pages de publicité. Il y a donc:

$$180 \times 30\% = 180 \times \frac{30}{100} = 180 \times 0,3 = 54 \text{ pages de publicité.}$$

Tableau de proportionnalité:

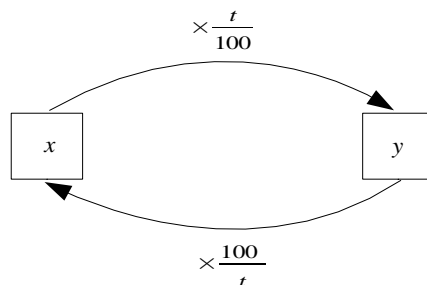
Quantité Q	100	$x$
$t\%$ de Q	$t$	$y$

$\times \frac{t}{100}$

L'application de la règle des produits en croix égaux fournit les 3 formules suivantes :

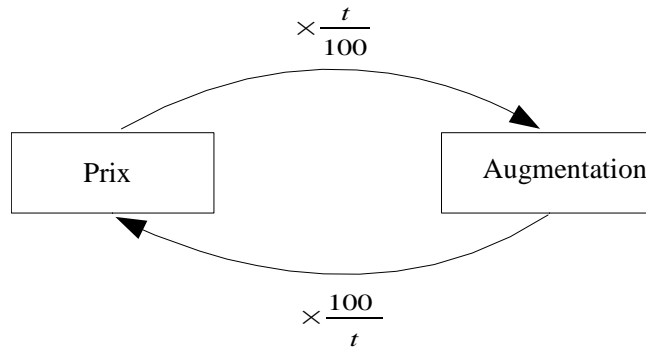
$$y = \frac{x \times t}{100} \quad , \quad t = \frac{y \times 100}{x} \quad , \quad x = \frac{y \times 100}{t}$$

L'information « y représente  $t\%$  de x » peut aussi être représentée par le schéma :



Exemples:

Dans les trois exemples qui suivent, un prix  $x$  subit une augmentation de  $t\%$ .  $y$  représente l'augmentation.



1) Une somme de 150 € augmente de 25 %.

$$\text{Le montant de l'augmentation est: } 150 \text{ €} \times \frac{25}{100} = 150 \text{ €} \times 0,25 = 37,5 \text{ €}$$

2) Une augmentation de 40 % se traduit par une hausse de prix de 30 €.

$$\text{Le prix de départ était: } 30 \text{ €} \cdot \frac{40}{100} = 30 \text{ €} \times \frac{100}{40} = 75 \text{ €}$$

3) Une augmentation de 24 € sur un montant de 120 € représente  $\frac{24}{120} = 0,2 = 20\%$  d'augmentation.

### Pourcentages successifs (pourcentage de pourcentage)

Quand on prend  $t_1\%$  des  $t_2\%$  d'une quantité  $Q$ , le taux final  $t$  vérifie la formule :

$$\frac{t}{100} = \frac{t_1}{100} \times \frac{t_2}{100}$$

Exemple:

Dans un lycée, 55 % des élèves sont des filles, et 25 % des filles ont les yeux bleus.

Il y a donc:  $\frac{55}{100} \times \frac{25}{100} = \frac{1375}{10000} = 13,75\%$  de filles aux yeux bleus dans ce lycée.

### Pourcentage d'évolution (augmentation ou diminution)

#### A) Connaissant les quantités de départ et d'arrivée

1) Après augmentation de  $t\%$ , une quantité  $Q_1$  est devenue  $Q_2$ .

Comment calculer  $t$  à partir des quantités  $Q_1$  et  $Q_2$  ?

L'augmentation est:  $Q_2 - Q_1$ . Le pourcentage d'augmentation  $t\%$  est donné par:  $\frac{t}{100} = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_1}$ .

2) Après diminution de  $t\%$ , une quantité  $Q_1$  est devenue  $Q_2$ .

Comment calculer  $t$  à partir des quantités  $Q_1$  et  $Q_2$  ?

La diminution est:  $Q_1 - Q_2$ . Le pourcentage de diminution  $t\%$  est donné par:  $\frac{t}{100} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$

Exemples:

1) Un magazine passe de 80 pages à 90 pages.

Son nombre de pages a augmenté de:  $\frac{90-80}{80} = \frac{10}{80} = 0,125 = 12,5\%$ .

2) Un lycée voit son effectif passer de 800 à 750 élèves.

Son effectif a diminué de:  $\frac{800-750}{800} = \frac{50}{800} = 0,0625 = 6,25\%$ .

## **B) Connaissant le taux d'évolution**

Considérons un article dont le prix est  $P$ .

1) On augmente le prix initial  $P$  de  $t\%$ . Quel est le nouveau prix après cette augmentation?

L'augmentation est:  $P \times \frac{t}{100}$ .

Le nouveau prix sera donc après augmentation:  $P + P \times \frac{t}{100} = P \left( 1 + \frac{t}{100} \right)$ .

Le prix initial  $P$  a donc été multiplié par  $1 + \frac{t}{100}$ .

2) On diminue le prix initial  $P$  de  $t\%$ . Quel est le nouveau prix après cette diminution?

La diminution est:  $P \times \frac{t}{100}$ .

Le nouveau prix sera donc après diminution:  $P - P \times \frac{t}{100} = P \left( 1 - \frac{t}{100} \right)$ .

Le prix initial  $P$  a donc été multiplié par  $1 - \frac{t}{100}$ .

### Règles à retenir:

Augmenter un prix de  $t\%$ , c'est le multiplier par  $1 + \frac{t}{100}$ .

Diminuer un prix de  $t\%$ , c'est le multiplier par  $1 - \frac{t}{100}$ .

Exemples:

1) Augmenter un prix de  $5\%$  revient à le multiplier par  $1,05$ .

Diminuer un prix de  $15\%$  revient à le multiplier par  $0,85$ .

2) Multiplier un prix par  $1,2$  revient à lui appliquer une augmentation de  $20\%$ .

Multiplier un prix par  $0,9$  revient à lui appliquer une réduction de  $10\%$ .

3) Le prix d'un article passe de  $25\text{ €}$  à  $27\text{ €}$ . Quel est le pourcentage d'augmentation ?

Le prix a été multiplié par  $\frac{27}{25} = 1,08 = 1 + 0,08 = 1 + \frac{8}{100}$ , il a donc subi une augmentation de  $8\%$ .

4) Le prix d'un article passe de  $60\text{ €}$  à  $55,5\text{ €}$ . Quel est le pourcentage de réduction ?

Le prix a été multiplié par  $\frac{55,5}{60} = 0,925 = 1 - 0,075 = 1 - \frac{7,5}{100}$ , il a donc subi une réduction de  $7,5\%$ .

### Augmentations successives

Appliquer à un prix  $P$  une augmentation de  $t_1\%$ , suivie d'une augmentation de  $t_2\%$ , revient à effectuer deux multiplications successives par  $\left(1 + \frac{t_1}{100}\right)$ , puis par  $\left(1 + \frac{t_2}{100}\right)$ .

Finalement on a multiplié le prix  $P$  par  $\left(1 + \frac{t_1}{100}\right)\left(1 + \frac{t_2}{100}\right)$ .

On peut alors interpréter cette multiplication comme une augmentation en pourcentage.

Exemple:

La population d'une ville augmente de 20 % l'année 2005, puis de 25 % l'année 2006. Quel est le pourcentage d'augmentation pour ces deux années ?

En 2005 la population a été multipliée par 1,2.

En 2006 la population a été multipliée par 1,25.

Pour les deux années, la population a été multipliée par  $1,2 \times 1,25 = 1,5 = 1 + 0,5$ , ce qui correspond à une augmentation de 50 %.

### Diminutions successives

Appliquer à un prix  $P$  une diminution de  $t_1\%$ , suivie d'une diminution de  $t_2\%$ , revient à effectuer deux multiplications successives par  $\left(1 - \frac{t_1}{100}\right)$ , puis par  $\left(1 - \frac{t_2}{100}\right)$ .

Finalement on a multiplié le prix  $P$  par  $\left(1 - \frac{t_1}{100}\right)\left(1 - \frac{t_2}{100}\right)$ .

On peut alors interpréter cette multiplication comme une diminution en pourcentage.

Exemple:

Un article subit une diminution de 5 %, suivie d'une diminution de 10 %.

La diminution de 5 % correspond à une multiplication par 0,95.

La diminution de 10 % correspond à une multiplication par 0,9.

Après ces deux diminutions, le prix de l'article a donc été multiplié par  $0,95 \times 0,9 = 0,855 = 1 - 0,145$  ce qui correspond à une diminution de 14,5 %.

### Augmentation et diminution successives

On peut combiner les deux cas précédents.

Exemple:

Un article subit une augmentation de 20 %, suivie d'une réduction de 20 %.

L'augmentation de 20 % correspond à une multiplication par 1,2.

La réduction de 20 % correspond à une multiplication par 0,8.

Après ces deux variations, le prix de l'article a donc été multiplié par  $1,2 \times 0,8 = 0,96 = 1 - 0,04$ , ce qui correspond à une baisse de 4 %.

Remarques:

Une hausse de  $t_1\%$ , suivie d'une hausse de  $t_2\%$ , n'est pas équivalente à une hausse de  $(t_1 + t_2)\%$ .

Une baisse de  $t_1\%$ , suivie d'une baisse de  $t_2\%$ , n'est pas équivalente à une baisse de  $(t_1 + t_2)\%$ .

Une hausse de  $t\%$  n'est pas compensée par une baisse de  $t\%$ .