$1^{ère}S2$ Devoir de contrôle n°10

Mercredi 30 Mai 2007.

I) Sans justification, entourer la réponse exacte.
Ne pas répondre au hasard : deux erreurs annulent une réponse exacte.

Une suite strictement décroissante est majorée par son premier terme.	VRAI FAUX
Une suite arithmétique de raison 0,5 est décroissante.	VRAI FAUX
Une suite géométrique de raison 0,5 est croissante si son premier terme est négatif et décroissante si son premier terme est positif.	VRAI FAUX
Un prix qui augmente de 10 % chaque année, augmente de 33,1 % en trois ans.	VRAI FAUX
La suite (U_n) de terme général $U_n = \sin(n)$ est périodique.	VRAI FAUX
La suite (U_n) de terme général $U_n = (0{,}99999999999999)^n$ converge vers 1.	VRAI FAUX
La suite (U_n) de terme général $U_n = (-0{,}5)^n$ converge vers 0.	VRAI FAUX
La suite (U_n) de terme général $U_n = \frac{(-1)^n}{n}$ converge vers 0.	VRAI FAUX
Toute suite convergente est bornée.	VRAI FAUX
La suite (U_n) de terme général $U_n = (-1)^n$ a deux limites : -1 et 1.	VRAI FAUX

II) Dans le tableau ci-dessous, il n'y a que des suites arithmétiques ou des suites géométriques.
Complétez les cases vides .

1^{er} terme u_0	$2^{ème}$ terme u_1	$3^{ème}$ terme u_2	Terme général u_n	Formule de récurrence	Raison	Arithmétique/géométrique
		10		$u_{n+1} = u_n - 2$		
8	12	16				
			$u_n = 2 \times 3^n$			
		8			2	géométrique
	30			$u_{n+1} = 5\ u_n$		
2					10	arithmétique
			$u_n = 2 - n$			
4	2	1				

III) Calculer la somme: A = 1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16 +·····+ 292 + 295 + 298 = $\sum_{k=0}^{k=99} 3k+1$.

IV) C'est l'histoire du grand gagnant d'un super-jeu où 100 % des perdants ont tenté leur chance.

Chaque jour du mois d'avril 2007, l'organisateur vous a versé tous les jours 35 791 395 €.
En contrepartie, vous lui avez versé 1 € le 1[er] avril, 2 € le 2 avril, 4 € le 3 avril, 8 € le 4 avril, etc., en doublant chaque jour la somme versée jusqu'à la fin du mois d'avril.
Comme tout joueur béat, vous sembliez satisfait(e) de votre gain. Quel était-il donc, au fait ?

Le gentil organisateur vous a proposé le même jeu pendant ce mois de mai 2007, mais il a fait encore plus fort pour vous appâter, car il vous propose ce mois-ci de vous verser chaque jour la somme pharamineuse de 50 000 000 €. Ébloui(e) par l'appât du gain, vous n'avez pu résister à la tentation et participez donc une nouvelle fois à ce jeu.
En contrepartie, vous lui avez versé 1 € le 1[er] mai, 2 € le 2 mai, 4 € le 3 mai, 8 € le 4 mai, etc., en doublant chaque jour la somme versée jusqu'à la fin du mois qui est ….. demain (déjà ?).
Je vous sens préoccupé(e) par l'avenir ! Pourquoi donc ?

V) La suite (U_n) est définie sur ℕ par: $U_{n+1}=\frac{2U_n-4}{3U_n+2}$. Son premier terme est $U_0 = 0$.

1) Calculer U_1, U_2 et U_3 .

2) Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $U_{n+2}=\frac{-2U_n-4}{3U_n-2}$, puis que $U_{n+3}=U_n$.

3) En utilisant les questions précédentes et en justifiant vos réponses dire si la suite (U_n) est :
   - a) périodique ?
   - b) majorée ?
   - c) minorée ?
   - d) bornée ?
   - e) convergente ?

VI) La suite (U_n) est définie sur ℕ par: $U_{n+1}=\frac{1}{3}U_n-2$. Son premier terme est $U_0 = 3$.

1) Calculer U_1 et U_2 .

2) Vérifier que la suite (U_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

3) Soit (V_n) la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par : $V_n=U_n+3$.

Démontrer que (V_n) est une suite géometrique dont on déterminera la raison q et de premier terme V_0.

4) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, exprimer V_n en fonction de n.

En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $U_n=-3+\frac{2}{3^{n-1}}$.

5) La suite (U_n) est-elle convergente ? Si oui, préciser sa limite. Justifiez votre réponse.

VII) Sur le graphique ci-dessous sont tracées :

- La droite (D) d'équation y = x .
- La courbe (C) représentant la fonction *f* définie sur] 0 ; + ∞ [par : $f(x)=1+\dfrac{4}{x}$.

La suite (U_n) est définie sur ℕ par son premier terme $U_0 = 1$ et la formule de récurrence : $U_{n+1} = f(U_n)$.

1) Placer U_1 et U_2 sur le dessin. Construire à l'aide de ce même procédé graphique U_3 et U_4 .

2) Par observation graphique, que penser du sens de variation de (U_n)?

3) Quelle observation du graphique permet de penser que la suite (U_n) converge vers un réel α ?

En utilisant la remarque précédente, montrer que $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$.