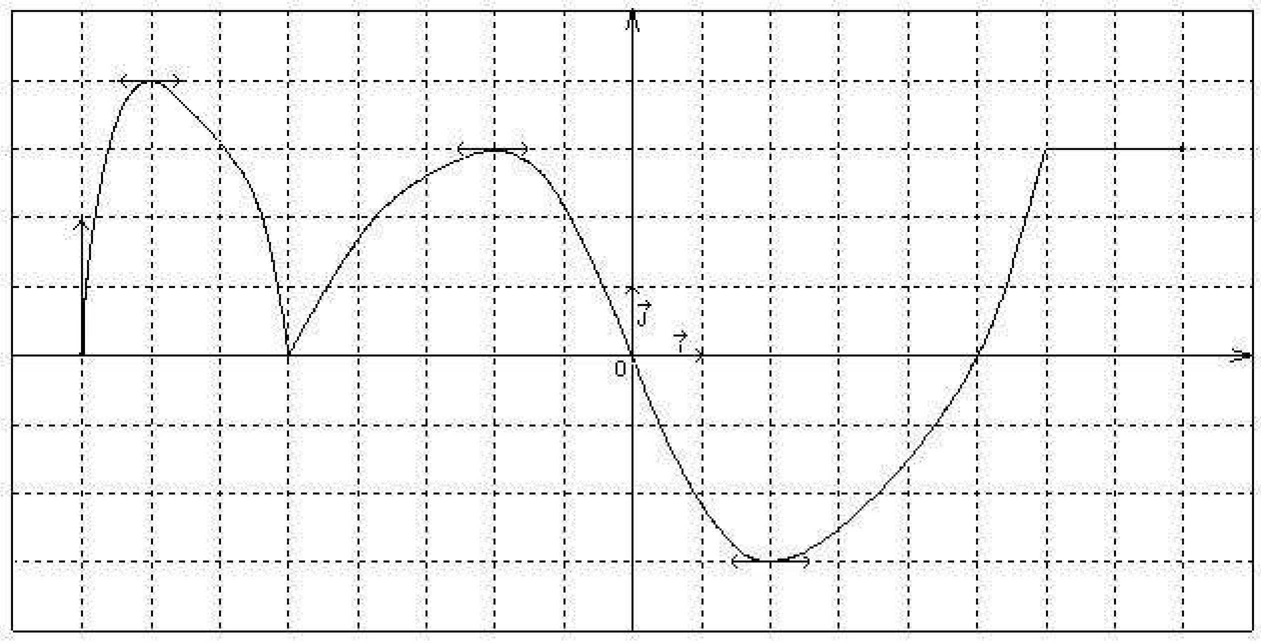
$1^{ère}$S2 Devoir de contrôle n°5

Mercredi 31 Janvier 2007.

I) Dans le repère orthonormal $(O\ ,\vec{i}\ ,\vec{j})$ ci-dessous est représentée graphiquement une fonction f définie sur l'intervalle [–8 ; 8]. Les tangentes parallèles aux axes de coordonnées sont symbolisées par des segments fléchés.



Sans justifier vos réponses, par simple lecture graphique, répondre aux questions suivantes:

1) Pour quelles valeurs de la variable x a-t-on :
   a) f(x) > 0 ?
   b) f(x) < 0 ?
   c) f(x) = 0 ?
2) Sur quels intervalles la fonction est-elle dérivable ?
3) Pour quelles valeurs de la variable x a-t-on :
   a) f '(x) > 0 ?
   b) f '(x) < 0 ?
   c) f '(x) = 0 ?

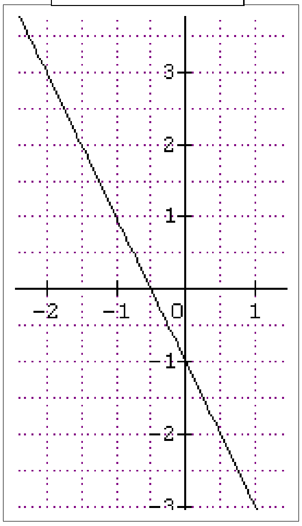
II)

f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Sans justification, entourer la réponse exacte.
Ne pas répondre au hasard : 2 erreurs annulent une réponse exacte.

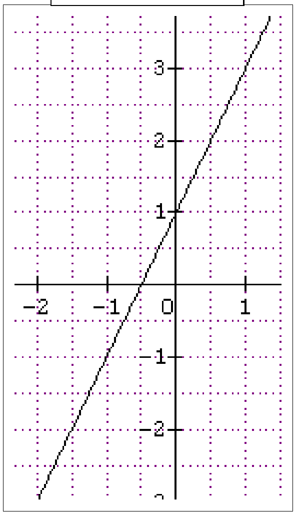
Si f et g sont croissantes sur I, alors f + g est croissante sur I.	VRAI	FAUX
Si f et g sont croissantes sur I, alors f $\times$ g est croissante sur I.	VRAI	FAUX
Si f est strictement croissante sur I, alors, pour tout x$\in$I, on a : f '(x) > 0.	VRAI	FAUX
Si a$\in$I et si f '(a) = 0 alors f(a) est un extremum local de f sur I.	VRAI	FAUX
Si a$\in$I et si M = f(a) est le maximum de f sur I, alors f '(a) = 0.	VRAI	FAUX
Si f n'est pas monotone sur I, alors, il existe a$\in$I tel que f '(a) = 0.	VRAI	FAUX

III)

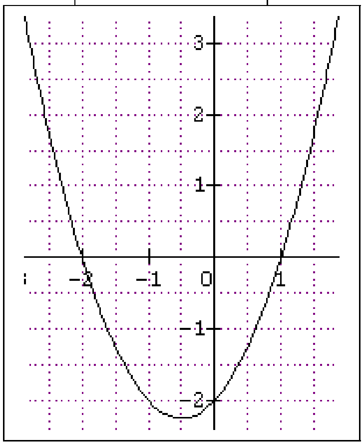
graphique de f



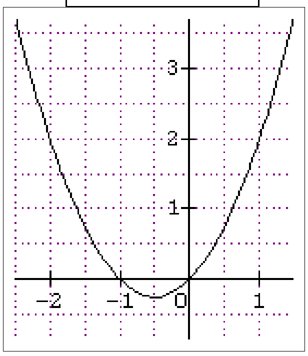
graphique de g



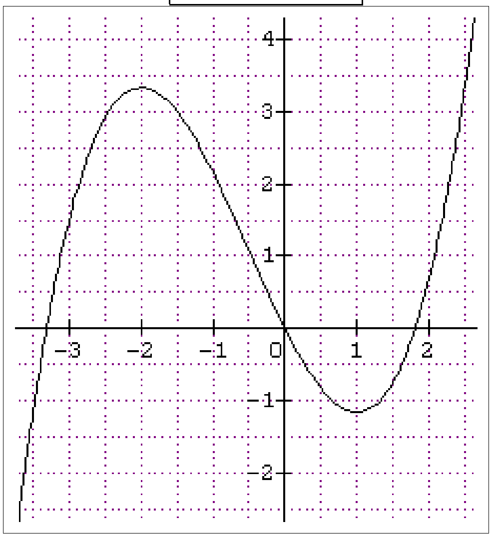
graphique de h



graphique de j



graphique de i



Vous voyez ci-dessus une partie des représentations graphiques de cinq fonctions polynômes f , g , h , i et j.
Parmi ces fonctions, certaines sont les fonctions dérivées d'autres.
En recherchant les informations utiles sur les graphiques de ces fonctions et en justifiant votre réponse, donner les associations entre fonction et dérivée.

IV) f est la fonction définie sur $[-4 \,;\, 3]$ par : $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2 + 20$.

En justifiant le signe de $f'(x)$, réaliser le tableau des variations de f.

NB : Les valeurs des maxima et minima locaux pourront être obtenus avec la table de votre calculatrice graphique et n'ont pas besoin d'être justifiés.

V) f est la fonction définie par la formule : $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

1) Dans quel ensemble la fonction f est-elle définie ? est-elle dérivable ?

2) Vérifier que : $f'(x) = \dfrac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$ pour toute valeur de x où f est dérivable.

3) Après avoir étudié le signe de la dérivée, réaliser le tableau des variations de f.

VI) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1 - x)^3$.

1) En donnant la formule utilisée, calculer $f'(x)$.

2) Expliquer pourquoi lorsque x est très proche de zéro, on a : $f(x) \approx 1 - 3x$.

VII)

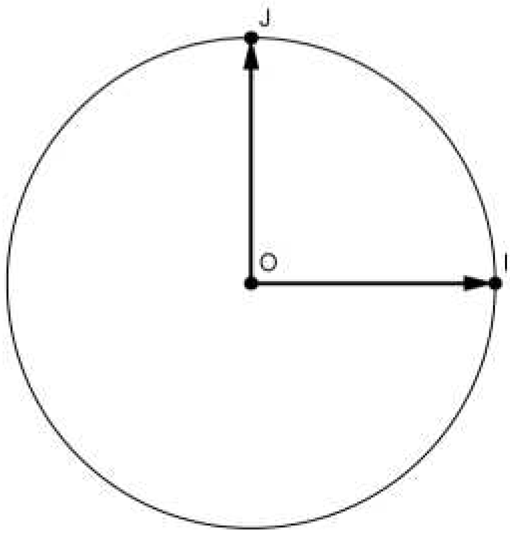
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. (C) est la courbe représentative de f dans un repère du plan.

1) M est un point de (C) d'abscisse $a \in \mathbb{R}^*$. On note (T) la droite tangente à (C) en M.

Prouver que (T) a pour équation $y = -\dfrac{1}{a^2}x + \dfrac{2}{a}$.

2) On choisit A(3 ; −1). Montrer qu'il existe deux droites (T_1) et (T_2) passant par A et tangentes à $\mathcal{C}$. Donner les coordonnées des points de contact M_1 et M_2 de (T_1) et (T_2) avec la courbe (C), ainsi que les équations de (T_1) et de (T_2).

VIII)



Le cercle ci-contre est un cercle trigonométrique muni du repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

1) Placer sur ce cercle les points A, B, D, E, F et G tels que :

$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = \dfrac{7\pi}{3}$ $\qquad$ $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) = -\dfrac{3\pi}{4}$

$(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OD}) = -\dfrac{5\pi}{6}$ $\qquad$ $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OI}) = -\dfrac{7\pi}{8}$

$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OF}) = 2007\pi$ $\qquad$ $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OG}) = -\dfrac{58\pi}{3}$

Si besoin est, préciser les calculs effectués pour placer ces points.

2) En utilisant les propriétés des angles orientés, calculer les mesures principales des angles :

$(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OF})$ $\qquad$ $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE})$ $\qquad$ $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE})$

La droite (OB) est-elle bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE})$? Justifier votre réponse.

3) En utilisant la propriété de la somme des angles d'un triangle, prouver que : $(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BO}) = \dfrac{\pi}{8}$.

4) Quelle propriété de géométrie élémentaire permet de prouver que : $2(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$?

En déduire la mesure principale de $(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BA})$. Conclure que : $(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}) = \dfrac{\pi}{24}$.

5) Prouver que $(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EO}) = \dfrac{5\pi}{48}$.

En utilisant les résultats précédents, calculer la mesure principale de $(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{BA})$.

Les droites (ED) et (BA) sont-elles perpendiculaires ?