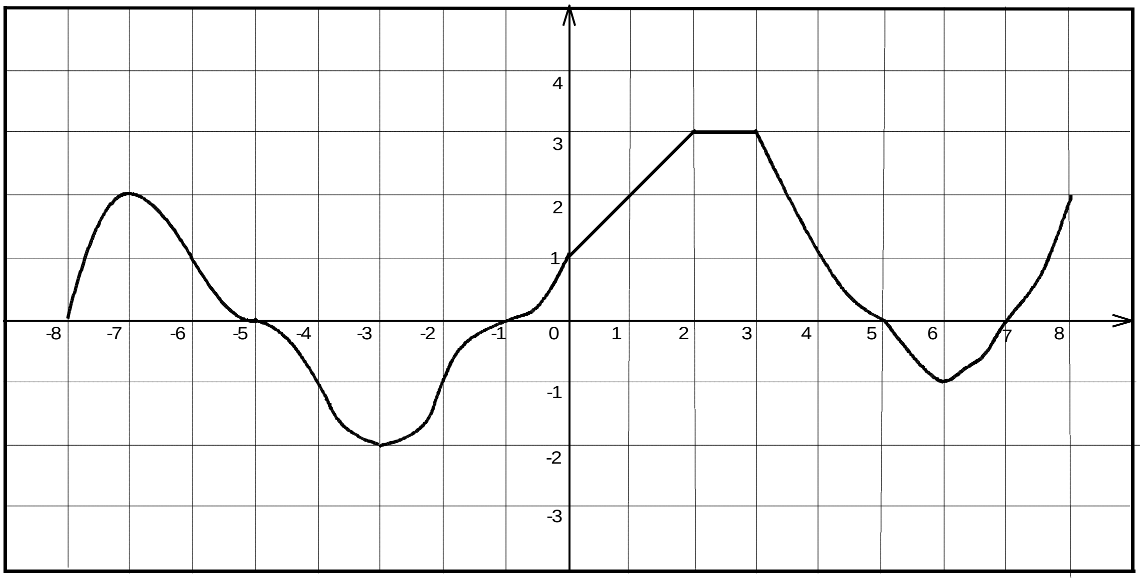
$1^{ère}$S4 Devoir de contrôle n°1

Mercredi 3 Octobre 2007.

I) Voici la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $I = [-8 ; 8]$:



Sans justifier vos réponses, par simple lecture graphique, compléter les phrases suivantes:

Le maximum de f sur I est ………Il est atteint pour :..

Le minimum de f sur I est ………Il est atteint pour :……………………………

L'image de 1 est ....

Les antécédents de -1 sont ....

La fonction f est strictement croissante sur ....……..

La fonction f est strictement décroissante sur ....……

La fonction f est constante sur ....……

La fonction f est-elle monotone sur I ?...…...... Pourquoi ?.....................................……

………..……

La fonction f est-elle bornée sur I ?...…...... Pourquoi ?.....................................……….

………...

$f(x) \geqslant 0$ lorsque ....….......

Lorsque $x \in [0 ; 7]$, on a: $f(x) \in$ ....

$f(x) \in]-1 ; 0]$ lorsque $x \in$ ....

Le tableau des variations de la fonction f est:

II) Dans chacun des cas ci-dessous, en précisant son ensemble de définition, donner un exemple de fonction f pouvant convenir :

1) f est impaire et bornée.

2) f est paire et non bornée.

3) f est périodique de période 2π.

4) f est majorée par 0.

5) f est une fonction trinôme du second degré ayant pour racines : -2 ; 1.

6) f est une fonction trinôme du second degré ayant pour maximum $f(2) = -1$.

III) f est une fonction trinôme du second degré telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Δ est le discriminant de $f(x)$.

Quatre tableaux de variations et quatre tableaux de signes sont représentés ci-dessous.

Pour chaque tableau, déterminer si $a > 0$ ou $a < 0$ et si $\Delta > 0$ ou $\Delta < 0$ ou $\Delta = 0$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		↗	1	↘	

tableau n° 1

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		↗	-1	↘	

tableau n° 2

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		↘	-1	↗	

tableau n° 3

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↗	

tableau n° 4

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

tableau n° 5

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

tableau n° 6

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

tableau n° 7

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

tableau n° 8

IV)

1) Démontrer que, si a et c sont des réels de signes différents,
alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ possède deux solutions dans $\mathbb{R}$.

2) Fabriquer un exemple qui montre que la réciproque de la propriété prouvée à la première question est fausse.

V) Dans chacun des cas suivants,

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$.
- Étudier le signe de $f(x)$.
- Lorsque cela est possible, factoriser $f(x)$ sous forme d'un produit de facteurs du premier degré. Si la factorisation n'est pas possible, écrire $f(x)$ sous forme canonique.

1) $f(x)=x^2-x+1$.

2) $f(x)=-5x^2+30x-45$.

3) $f(x)=x^2-x-1$.

4) $f(x)=\sqrt{3}\,x^2-4x+\sqrt{3}$.

VI) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=3(x-2)^2+1$. On décompose f à l'aide de quatre fonctions a, b, c et d telles que $f=d\circ c\circ b\circ a$ de la façon suivante :

$$x \overset{a}{\mapsto} x-2 \overset{b}{\mapsto} (x-2)^2 \overset{c}{\mapsto} 3(x-2)^2 \overset{d}{\mapsto} 3(x-2)^2+1 \cdot$$

1) Donner les formules de calcul de $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ et $d(x)$.
2) Indiquer le sens de variation des fonctions a, b, c et d .
3) En déduire que f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;2]$.
4) Prouver que f possède un minimum. Quel est-il ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?

VII) Ci-dessous est tracé le tableau des variations d'une fonction f définie sur [–2 ; 2].

x	-2		-1		0		1		2
Variations de f	1	↘	0	↘	-4	↗	0	↘	-3

Ci-dessous est tracé le tableau des variations d'une fonction g définie sur [–4 ; 1].

x	-4		-3		0		1
Variations de g	2	↘	0	↘	-1	↗	3

On définit les fonctions a, b, c, d et e par les formules :

$a(x)=f(x)+2$ $\qquad$ $b(x)=f(x+2)$

$c(x)=[f(x)]^2$ $\qquad$ $d(x)=f(x^2)$ $\qquad$ $e(x)=g[f(x)]$

Pour chacune des fonctions a, b, c, d et e , déterminer son ensemble de définition et son sens de variation. Résumer cela dans un tableau de variations.

La rédaction des raisonnements aboutissant à la conclusion n'est pas exigé. En revanche, des tableaux de variation adaptés peuvent être efficacement utilisés comme support aux raisonnements, comme cela avait été réalisé en classe.