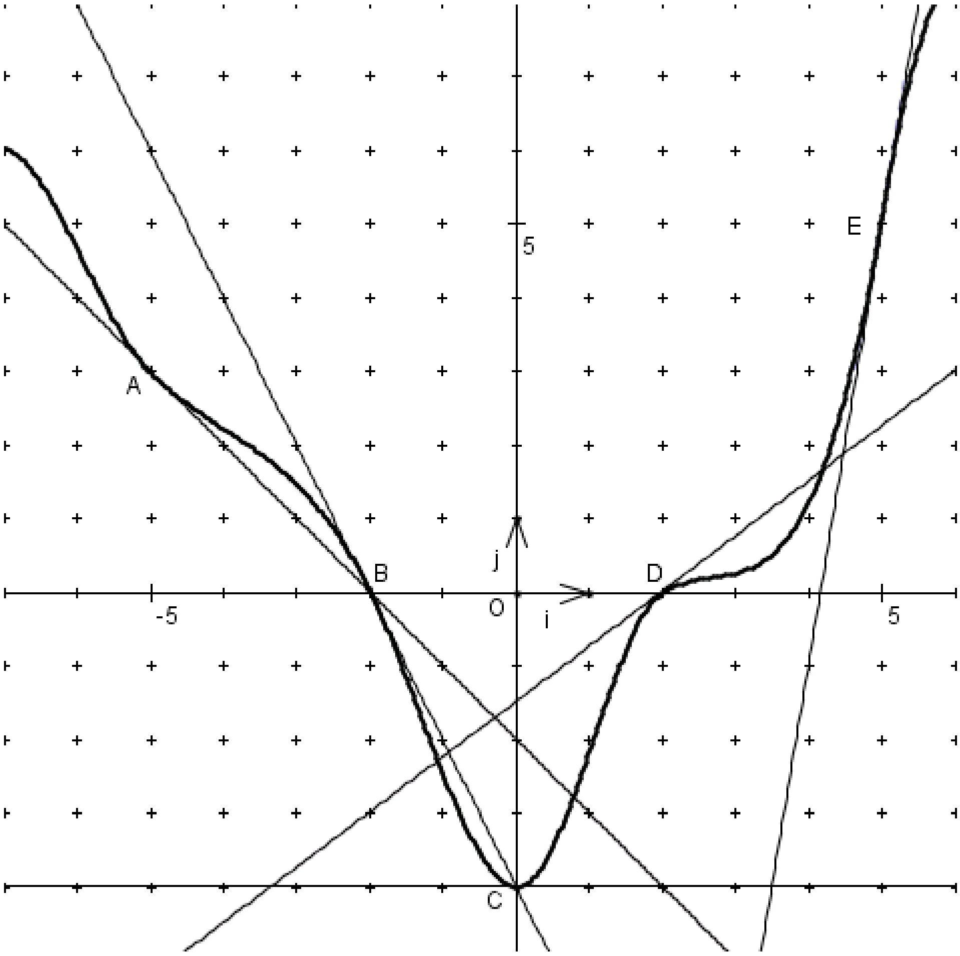
# $1^{ère}$ S4  Devoir de contrôle n°4

Mercredi 9 Janvier 2008.

## Exercice 1




Dans le repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ ci-dessus a été tracé la courbe $\mathscr{C}$ représentative d'une fonction $f$ dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que les droites tangentes à cette courbe aux points $A(-5 ; 3)$ , $B(-2 ; 0)$ , $C(0 ; -4)$ , $D(2 ; 0)$ et $E(5 ; 5)$.

En utilisant les points du quadrillage, évaluer graphiquement les nombres dérivés:

$$f'(-5) \quad , \quad f'(-2) \quad , \quad f'(0) \quad , \quad f'(2) \quad \text{et} \quad f'(5).$$

*Aucune explication n'est demandée. Ces réels sont des entiers ou des fractions simples.*

## Exercice 2

1) Comment se manifeste graphiquement le fait que la fonction valeur absolue ne soit pas dérivable en 0 ?
2) Comment se manifeste graphiquement le fait que la fonction racine carrée ne soit pas dérivable en 0 ?
3) Deux fonctions dérivables différentes peuvent-elle avoir la même fonction dérivée ? Expliquez !

## Exercice 3

Pour chaque fonction *f* ci-dessous, déterminer sa fonction dérivée $f'$.
• En précisant pourquoi elles sont dérivables sur les ensembles de définition donnés.
• En donnant le détail de vos calculs et les formules utilisées, lorsque la réponse n'est pas évidente.

1) Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 5x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x - 1$.

2) Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 2x)^5$.

3) Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(3x - 1)$.

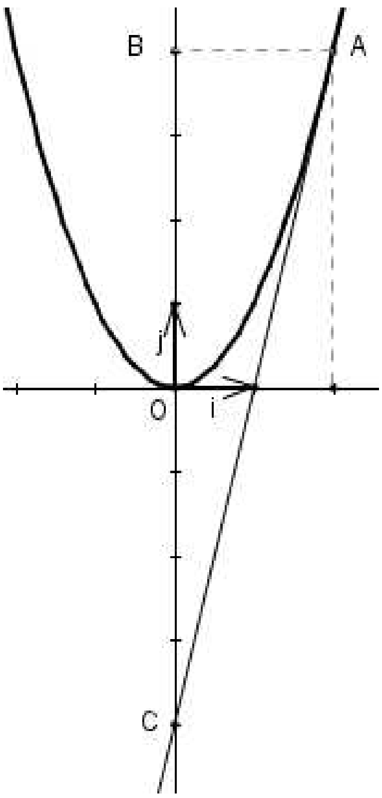
4) Pour $x \in ]0 ; +\infty[$, $f(x) = -\dfrac{1}{4x^4}$.

5) Pour $x \in ]0 ; +\infty[$, $f(x) = 2x\sqrt{x}$ *Montrer comment aboutir à la forme:* $f'(x) = 3\sqrt{x}$.

6) $x \in ]-\infty ; 0[$, $f(x) = \dfrac{1 - 3x}{2x - 1}$

7) Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = [\sin(2x)]^2$

## Exercice 4




Sur le graphique ci-contre, muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, on a tracé la parabole $\mathscr{P}$ représentative de la fonction carré *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

*A* est un point quelconque de $\mathscr{P}$ d'abscisse $a \in \mathbb{R}^*$.

*B* est le projeté orthogonal de *A* sur l'axe des ordonnées.

*C* est le symétrique de *B* par rapport à l'origine *O* du repère.

1) Donner, en fonction du réel *a*, les coordonnées des points *A*, *B* et *C*.

2) Prouver que la droite *(AC)* est tangente à la parabole $\mathscr{P}$ en *A*.

## Exercice 5

La fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ où $a$, $b$, $c$ et $d$ sont quatre réels inconnus.
La représentation graphique de $f$ dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ est la courbe $\mathscr{C}$.

Déterminer les réels $a$, $b$, $c$ et $d$ sachant que:

- $\mathscr{C}$ coupe l'axe des ordonnées en un point $A$ d'ordonnée $-3$.
- La tangente à $\mathscr{C}$ en $A$ est parallèle à la droite d'équation $y=x$.
- $\mathscr{C}$ passe par le point $B(1\,;-3)$.
- La tangente à $\mathscr{C}$ en $B$ est parallèle à l'axe des abscisses.

## Exercice 6

Soit $f$ la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par $f(x)=\sqrt{2x+1}$.

1) Pourquoi $f$ est-elle dérivable sur $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ ? Justifier que: $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$.
2) Expliquer pourquoi, lorsque $x$ est très proche de 0, on a: $f(x)\approx x+1$.

## Exercice 7

La fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x)=-x^2+5x-4$ .
Sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ est la parabole $\mathscr{P}$.

1) $A$ est un point de la parabole $\mathscr{P}$ d'abscisse $a\in\mathbb{R}$.
   a) Quelle est l'ordonnée de $A$ ?
   b) Dire pourquoi $\mathscr{P}$ admet une tangente $\mathscr{T}$ en $A$.
   c) Expliquer pourquoi le coefficient directeur de $\mathscr{T}$ est $m=-2a+5$.
   d) Expliquer pourquoi l'ordonnée à l'origine de $\mathscr{T}$ est $p=a^2-4$

2) Déterminer le réel $a$ pour que $\mathscr{T}$ soit parallèle à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=-x+3$.

3) Déterminer le réel $a$ pour que $\mathscr{T}$ passe par l'origine $O$ du repère.

## Exercice 8

La fonction inverse $f$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ par: $f(x)=\frac{1}{x}$.
Sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ est l'hyperbole $\mathscr{H}$.
$A$ est un point de l'hyperbole $\mathscr{H}$ d'abscisse $a\in\mathbb{R}^*$ et $\mathscr{D}$ est la tangente en $A$ à l'hyperbole $\mathscr{H}$.

1) Démontrer que $\mathscr{D}$ a pour équation: $y=-\frac{1}{a^2}x+\frac{2}{a}$.

2) $P$ est le point du plan tel que $P(1\,;-1)$.
   Pour quelles valeurs du réels $a$ la droite $\mathscr{D}$ passe-t-elle par le point $P$ ?