$1^{ère}$ S4 Devoir de contrôle n°6

Lundi 18 février 2008.

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) A a pour coordonnées cartésiennes $(\sqrt{3};1)$. Quelles sont ses coordonnées polaires ?
2) B a pour coordonnées cartésiennes $\left(\sin\frac{2\pi}{5};\cos\frac{2\pi}{5}\right)$. Quelles sont ses coordonnées polaires ?
3) C a pour coordonnées polaires $\left(\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right)$. Quelles sont ses coordonnées cartésiennes ?
4) D a pour coordonnées polaires $(r;\theta)$ tel que $1\leqslant r\leqslant 2$ et $-\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}$.
   Représenter sur un dessin l'ensemble de tous les points D vérifiant cela.

Exercice 2

x est un réel quelconque. Écrire le plus simplement possible:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$

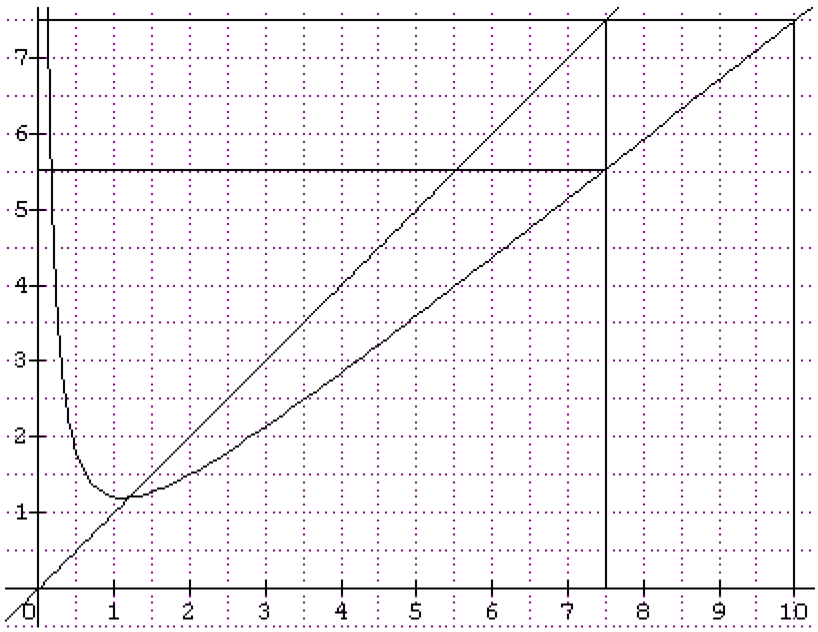
2) $\cos x+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)$

Exercice 3

Sur le graphique ci-dessous sont tracées :
- La droite *(D)* d'équation $y=x$.
- La courbe *(C)* représentant la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{4x^2-3x+5}{5x}$.

Ce graphique représente une suite (u_n) définie par $u_0=10$ et la relation de récurrence: $u_{n+1}=f(u_n)$.
Le but de l'exercice est de construire graphiquement (sans effectuer de calcul), les termes successif de cette suite (u_n).

1) Placer u_0 sur l'axe des abscisses et u_1 sur les axes des abscisses et des ordonnées.
2) Construire à l'aide de ce même procédé graphique u_2, u_3 et u_4 en plaçant ces nombres sur les axe des abscisses et des ordonnées.
3) Que peut-on conjecturer sur le sens de variation de (u_n) ?
4) Lorsque n augmente, il semblerait que u_n se rapproche de plus en plus d'un nombre. Lequel ?
   Déterminer la valeur exacte de ce nombre.



Exercice 4

1) En utilisant l'égalité: $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, calculer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

2) En utilisant l'égalité: $\frac{\pi}{6}=2\times\frac{\pi}{12}$, calculer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

3) Bien que les écritures obtenues pour $\cos\frac{\pi}{12}$ soient différentes au 1) et au 2), montrer que c'est bien le même nombre. *La vérification analogue pour* $\sin\frac{\pi}{12}$ *n'est pas demandée.*

Exercice 5

x est un réel appartenant à l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right[$ tel que $\sin x=\frac{1}{3}$. Calculer la valeur exacte de $\sin(2x)$.

Exercice 6

Les suite (u_n), (v_n) et (w_n) sont définies pour tout entier naturel n par les égalités:

$u_n=1-3n$ $\qquad v_{n+1}=\frac{3v_n}{2}$ avec $v_0=\frac{4}{9}$ $\qquad w_n=\frac{n^2}{2^n}$

1) Compléter le tableau:

n	0	1	2	3	4
u_n					
v_n					
w_n					

2) Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante et que la suite (v_n) est strictement croissante.

3) On se propose de démontrer que la suite (w_n) est strictement décroissante à partir du rang $n=3$.

a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a: $w_{n+1}-w_n=\frac{-n^2+2n+1}{2^{n+1}}$.

b) Étudier le signe de $-n^2+2n+1$.

c) Conclure que, pour tout entier $n\geqslant 3$, on a: $w_{n+1}<w_n$.

Exercice 7

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{i};\vec{j})$. *On peut faire un dessin ..*

1) Le point A a pour coordonnées cartésiennes $(3;-1)$ et l'on note α l'angle polaire $(\vec{i};\overrightarrow{OA})$.
Calculer $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$.

2) Le point B a pour abscisse 2, pour rayon polaire $r=\sqrt{5}$ et pour angle polaire β avec $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.
Calculer $\cos\beta$ et $\sin\beta$.

3) Calculer $\cos(\beta-\alpha)$ et $\sin(\beta-\alpha)$.

4) Exprimer l'angle $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ en fonction de α et β. Conclure que: $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=\frac{\pi}{4}$.