$1^{ère}$ S4 Devoir de contrôle n°7

Mercredi 26 Mars 2008.

Exercice 1

Dans le tableau ci-dessous, il n'y a que des suites arithmétiques ou des suites géométriques.
Complétez les cases vides. Aucune justification n'est demandée.

1^{er} terme u_0	$2^{ème}$ terme u_1	$3^{ème}$ terme u_2	Terme général u_n	Formule de récurrence	Raison	Arithmétique ou géométrique
		11		$u_{n+1}=u_n+5$		
10	8	6				
			$u_n=3\times 2^n$			
		2			0,1	géométrique
	6			$u_{n+1}=3\,u_n$		
10					-1	arithmétique
			$u_n=2\,n-1$			
27	9	3				

Exercice 2

1) (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_3=5$ et $u_{15}=8$. Calculer u_{47}.

2) (v_n) est une suite géométrique telle que $v_5=4$ et $v_8=-108$. Calculer v_{10}.

Exercice 3

(a_n) est la suite des nombres entiers naturels impairs.
(b_n) est la suite des entiers naturels multiples de 3.
(c_n) est la suite des puissances de 2 dont les exposants sont les entiers naturels.

1) Complétez les phrases:
   - La suite (a_n) est une suite .... de premier terme $a_0=$ ...... et de raison ....
   - La suite (b_n) est une suite .... de premier terme $b_0=$ ...... et de raison ....
   - La suite (c_n) est une suite .... de premier terme $c_0=$ ...... et de raison ....

2) Pour les trois suites (a_n), (b_n) et (c_n) définies ci-dessus,

   a) Donner les formules de récurrence reliant a_{n+1} à a_n, b_{n+1} à b_n et c_{n+1} à c_n.

   b) Donner les formules exprimant a_n, b_n et c_n en fonction de $n\in\mathbb{N}$.

3) (A_n) est la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite (a_n), c'est à dire:

   Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a: $A_n=\sum_{k=0}^{k=n} a_k$. On définit de même: $B_n=\sum_{k=0}^{k=n} b_k$ et $C_n=\sum_{k=0}^{k=n} c_k$

   a) Calculer $A_{49}=1+3+5+7+9+\ldots\ldots+95+97+99$.

   b) Déterminer $n\in\mathbb{N}$ tel que $B_n=3978$.

   c) Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a: $c_{n+1}-C_n=1$.

Exercice 4
Le plan est muni du repère orthonormal direct $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.
A est le point de coordonnées polaires $\left(1 ; \frac{\pi}{6}\right)$. B est le point de coordonnées polaires $\left(1 ; \frac{\pi}{4}\right)$.

1) Déterminer les coordonnées cartésiennes de A et B dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.
   En déduire la valeur du produit scalaire : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$.
2) A l'aide de la propriété de Chasles, trouver la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB})$.
   En utilisant l'angle précédent, donner une deuxième expression du produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$.
3) En déduire la valeur exacte de : $\cos \frac{\pi}{12}$.

Exercice 5
Le plan est muni du repère orthonormal direct $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.
Pour tout $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\alpha \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$, on définit:

- le point A de coordonnées polaires $(r ; \alpha)$.
- le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon r.
- la droite $\mathscr{D}$ tangente à $\mathscr{C}$ en A.
- le point M d'intersection de $\mathscr{D}$ avec l'axe $(O ; \vec{j})$.

En calculant le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AM}$, montrer que l'ordonnée y_M de M est: $y_M = \frac{r}{\sin \alpha}$.

Exercice 6
$ABCD$ est un rectangle et E est tel que: $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$. On sait que $AB = 3a$ et $AD = 5a$ où $a \in \mathbb{R}^{+*}$.

1) Exprimer en fonction du réel a les produits scalaires: $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EC}$.
   En déduire que: $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EC} = 3a^2$.
2) On note $\widehat{BEC} = \alpha$. Exprimer $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EC}$ en fonction de a et de α.
   En déduire une approximation de α à 1 degré près.
3) Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant le théorème d'Al-Kashi dans le triangle BEC.

Exercice 7
r et d désignent deux nombres réels strictement positifs tels que $d > r$.
$\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon r et M est un point du plan tel que $OM = d$.
$\mathscr{D}$ une droite passant par M et sécante avec $\mathscr{C}$ en deux point A et B.
A' est le point symétrique de A par rapport à O.

1) Montrer que: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.
2) Utiliser le point O pour décomposer $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'}$ afin d'exprimer ce produit scalaire en fonction des distances d et de r seulement.
   En déduire que, pour tout point M du plan, le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ ne dépend que de d et de r.

Exercice 8
A et B étant deux points, on note $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre *[AB]* .
D et E sont deux points du cercle $\mathscr{C}$ tels que les droites *(AD)* et *(BE)* soient sécantes en un point F
Démontrer que: $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BF} = AB^2$