$1^{ère}$ S4 Devoir de contrôle n°8

Lundi 4 Mai 2008.

Exercice 1

A et B sont deux points du plan tels que $AB = 6$. I est le milieu de *[AB]*.

1) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 18$

2) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -5$

Exercice 2

$(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ est un repère orthonormal direct du plan.

$\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1.

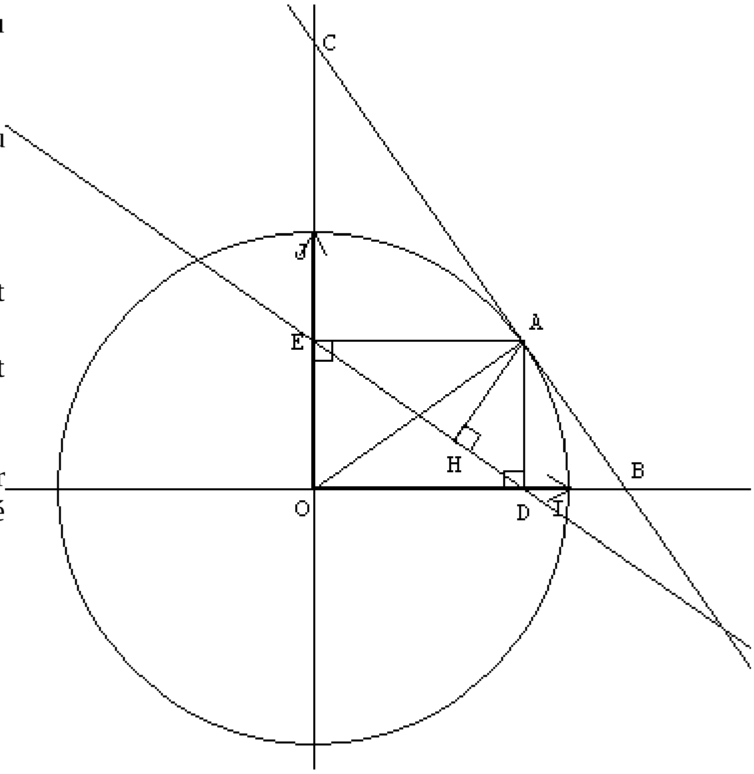
A est le point du cercle $\mathscr{C}$ d'angle polaire α où $\alpha \in]-\pi ; \pi]$.

$\mathscr{D}$ est la droite tangente au cercle $\mathscr{C}$ en A.

Lorsque la droite $\mathscr{D}$ et l'axe $(O ; \vec{i})$ sont sécants, on note B leur point d'intersection.
Lorsque la droite $\mathscr{D}$ et l'axe $(O ; \vec{j})$ sont sécants, on note C leur point d'intersection.

Le point D est le projeté orthogonal de A sur l'axe $(O ; \vec{i})$ et le point E est le projeté orthogonal de A sur l'axe $(O ; \vec{j})$.

H est le projeté orthogonal de A sur (ED).



1) Montrer que le coefficient directeur de la droite (OA) est $\tan \alpha$.
   Préciser pour quelles valeurs de α il n'est pas défini.

2) Prouver qu'une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ est: $x \cos \alpha + y \sin \alpha - 1 = 0$.
   Pour quelles valeurs de α la droite $\mathscr{D}$ est-elle parallèle aux axes de coordonnées $(O ; \vec{i})$? $(O ; \vec{j})$?

   On suppose dans la fin du problème que la droite $\mathscr{D}$ est sécante avec les deux axes de coordonnées.

3) Déterminer les coordonnées cartésiennes des points B , C , D et E.

4) Prouver qu'une équation cartésienne de la droite (ED) est: $x \sin \alpha + y \cos \alpha - \sin \alpha \cos \alpha = 0$

5) Vérifier que les coordonnées cartésiennes de H sont: $(\cos^3 \alpha ; \sin^3 \alpha)$.

Exercice 3

Dans le repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, on appelle $\mathscr{E}$ l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x ; y)$ vérifient l'équation: $x^2 + y^2 - 4x + 6y + k = 0$ où k est un réel quelconque.

1) Montrer que si k = 5, alors l'ensemble $\mathscr{E}$ est un cercle dont on déterminera les coordonnées du centre A et le rayon r .
2) Dans le cas général, préciser selon les valeur du réel k, la nature de l'ensemble $\mathscr{E}$.

Exercice 4

ABC est un triangle tel que: $BC=10$, $\widehat{ABC}=20\,°$ et $\widehat{ACB}=50\,°$.
Calculer les distances AB et AC. Les résultats seront arrondis à un dixième près.

Exercice 5

Dans le tableau ci-dessous, mettre une croix dans la bonne case. Les réponses fausses ne sont pas pénalisées, mais plusieurs croix sur la même ligne annulent une réponse juste de cette ligne.
Ce qui a été fait en classe suffit pour répondre directement à ces questions, mais en cas de doute, l'utilisation de la calculatrice graphique peut-être un bon auxiliaire.
Par soucis d'équité, les possesseurs d'une calculatrice disposant du calcul formel (type TI 89) doivent s'abstenir d'utiliser le module de calcul permettant d'obtenir sans effort les réponses attendues.

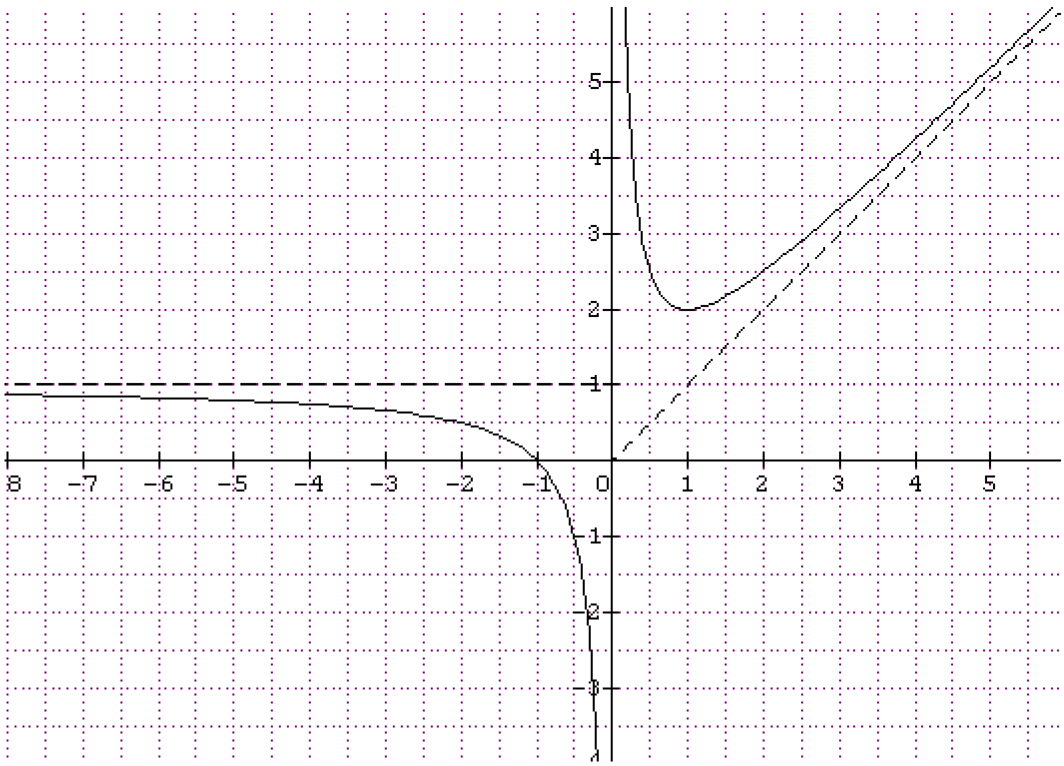
fonction f:	limite en:	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	n'existe pas
$f(x)=x^3$	-1						
$f(x)=x^4$	$-\infty$						
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	0						
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$+\infty$						
$f(x)=x^2-x$	$+\infty$						
$f(x)=1+\frac{1}{x}$	$+\infty$						
$f(x)=x+\frac{1}{x}$	0 à gauche						
$f(x)=\frac{x+1}{x-1}$	$+\infty$						
$f(x)=\frac{x+1}{x-1}$	1 à gauche						
$f(x)=\frac{x^2-1}{x}$	$-\infty$						
$f(x)=\frac{x^2-1}{x}$	0 à droite						
$f(x)=\frac{x}{x^2-1}$	$+\infty$						
$f(x)=\frac{x}{x^2-1}$	$-\infty$						
$f(x)=\frac{x}{x^2-1}$	1 à gauche						
$f(x)=\frac{x}{x^2-1}$	-1 à droite						
$f(x)=\sin(x)$	$+\infty$						
$f(x)=x\sin(x)$	$+\infty$						
$f(x)=\frac{\sin(x)}{x}$	$+\infty$						
$f(x)=\frac{\sin(x)}{x}$	0						
$f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$	0						

Exercice 6

Le tableau des variations d'une fonction f est donné ci-dessous.
En utilisant les informations contenues dans ce tableau, indiquer si la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f possède des asymptotes. Si tel est le cas, donner les équations de ces asymptotes. Justifiez votre réponse.

x	$-\infty$		-2		1		5		$+\infty$
$f(x)$	-4	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3

Exercice 7



La courbe ci-dessus est la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par:

Si $x \in]-\infty\,;0[$, alors: $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$ et si $x \in]0\,;+\infty[$, alors: $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$.

Cette courbe possède trois droites asymptotes. Donner les équations de ces asymptotes en justifiant vos réponses par un raisonnement utilisant les formules de calcul ci-dessus.

Exercice 8

Pour chacun des cas ci-dessous, en justifiant vos affirmations lorsque cela est nécessaire, inventez deux fonctions f et g satisfaisant les conditions énoncées.

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x)]=+\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} [g(x)]=-\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x)+g(x)]=1$

2) $\lim\limits_{x \to 0} [f(x)]=+\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} [g(x)]=-\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} [f(x)+g(x)]=1$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)]=0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} [g(x)]=+\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)\times g(x)]=1$

4) $\lim\limits_{x \to 0} [f(x)]=0$, $\lim\limits_{x \to 0} [g(x)]=+\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} [f(x)\times g(x)]=1$

Exercice 9

Sans justification, entourer la réponse exacte.
Ne pas répondre au hasard : 2 erreurs annulent une réponse exacte.

• Si f est définie sur $\mathbb{R}$ telle que: $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x)] = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)] = +\infty$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.	VRAI	FAUX
• Si f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors: $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)] = +\infty$.	VRAI	FAUX
• Si $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)] = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [g(x)] = +\infty$, alors: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = 0$	VRAI	FAUX
• Si $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)] = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [g(x)] = 0^+$, alors: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = +\infty$	VRAI	FAUX
• Si $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)] = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [g(x)] = 0$, alors: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = 1$	VRAI	FAUX
• Lorsque x tend vers $+\infty$, la représentation graphique d'une fonction f ne peut pas couper son asymptote.	VRAI	FAUX
• Il existe des fonctions f définies en 0 dont la limite en 0 ne soit pas $f(0)$.	VRAI	FAUX
• Si l'ensemble de définition de la fonction f est $\mathbb{R} - \{1\}$, alors la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la représentation graphique de f.	VRAI	FAUX
• Si $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)] = +\infty$, alors la représentation graphique de f ne possède pas de droite asymptote en $+\infty$.	VRAI	FAUX