1ère S4 Devoir de contrôle n°9

Mercredi 4 Juin 2008.

Exercice 1

f est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1\,;\,1\}$ par: $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$.

La courbe $\mathscr{C}$ est la représentation graphique de f dans le repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$.

1) Vérifier que f est une fonction impaire.
2) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3) Déterminer la limite de f en 1 (à gauche et à droite). Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
4) Déduire des trois questions précédentes les limites de f en $-\infty$ et en -1 à gauche et à droite.
5) Vérifier que, pour tout $x \neq -1$ et $x \neq 1$, on a : $f(x) = -x + \dfrac{x}{1-x^2}$.

   En déduire que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
6) M est un point de $\mathscr{C}$ et N un point de $\mathscr{D}$ de même abscisse x différente de -1 et de 1.
   a) Quelle est l'ordonnée $g(x)$ de $\overrightarrow{NM}$ dans la base $(\vec{i}\,;\,\vec{j})$?
   b) Étudier le signe de $g(x)$.
   c) En déduire la position relative de la droite $\mathscr{D}$ et de la courbe $\mathscr{C}$.
7) Démontrer que, pour tout $x \neq -1$ et $x \neq 1$, on a : $f'(x) = \dfrac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$.
8) Étudier le signe de cette dérivée et conclure par le tableau des variations de f.

Exercice 2

Sans justification, entourer la réponse exacte.
Ne pas répondre au hasard : deux erreurs annulent une réponse exacte.

Toute suite strictement décroissante est majorée par son premier terme.	VRAI	FAUX
La suite (U_n) de terme général $U_n = \sin(n)$ est périodique.	VRAI	FAUX
Toute suite convergente est bornée.	VRAI	FAUX
La suite (U_n) de terme général $U_n = (-1)^n$ a deux limites : -1 et 1.	VRAI	FAUX
Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $p \geqslant n$, on ait: $0 < \dfrac{1}{2^p} < \dfrac{1}{10^{100}}$.	VRAI	FAUX

Exercice 3

Cocher la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.
Les réponses fausses ne sont pas pénalisées, sauf s'il y a plusieurs réponses dans une même colonne.

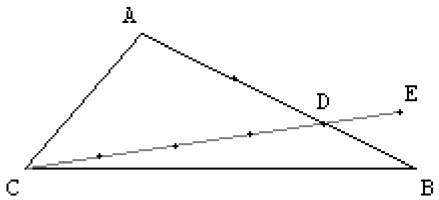
	$\sin n$	$1{,}00001^n$	$(-0{,}9)^n$	$0{,}99999^n$	$\dfrac{\sin n}{n}$	-2^n	$(-2)^n$	-2^{-n}	$\dfrac{n}{n+1}$	$\dfrac{2^{n+1}}{3^n}$
converge vers 0										
converge vers 1										
diverge vers $+\infty$										
diverge vers $-\infty$										
n'a pas de limite										

Exercice 4

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par: $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2}+1$. Son premier terme est $u_0=4$.

1) Calculer u_1 et u_2.
2) Vérifier que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
3) Soit (v_n) la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par : $v_n=u_n-2$.
   Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison q et de premier terme v_0.
4) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, exprimer v_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $u_n=2+\dfrac{1}{2^{n-1}}$.
5) La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, préciser sa limite. Justifiez votre réponse.

Exercice 5



Le dessin ci-contre représente un triangle ABC.
Les points D et E sont définis par :

$$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CE}=\frac{5}{4}\overrightarrow{CD}.$$

1) Déterminer des réels a et b vérifiant : D est barycentre de $\{(A,a);(B,b)\}$.
2) Déterminer des réels c et d vérifiant : E est barycentre de $\{(C,c);(D,d)\}$.
3) En déduire des réels x, y et z vérifiant : E est barycentre de $\{(A,x);(B,y);(C,z)\}$.

Exercice 6

ABC est un triangle représenté à l'annexe 1. Les mesures de ses côtés sont : $AB=7$, $BC=6$ et $AC=5$.
I est le barycentre de $\{(B,2);(C,1)\}$.
J est le barycentre de $\{(A,3);(C,2)\}$.
K est le barycentre de $\{(A,3);(B,4)\}$.
G est le barycentre de $\{(A,3);(B,4);(C,2)\}$.

1) En précisant la méthode utilisée, réaliser la construction des points I, J et K sur la feuille annexe 1.
2) Démontrer que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes en G.

Exercice 7

$ABCD$ est un parallélogramme.

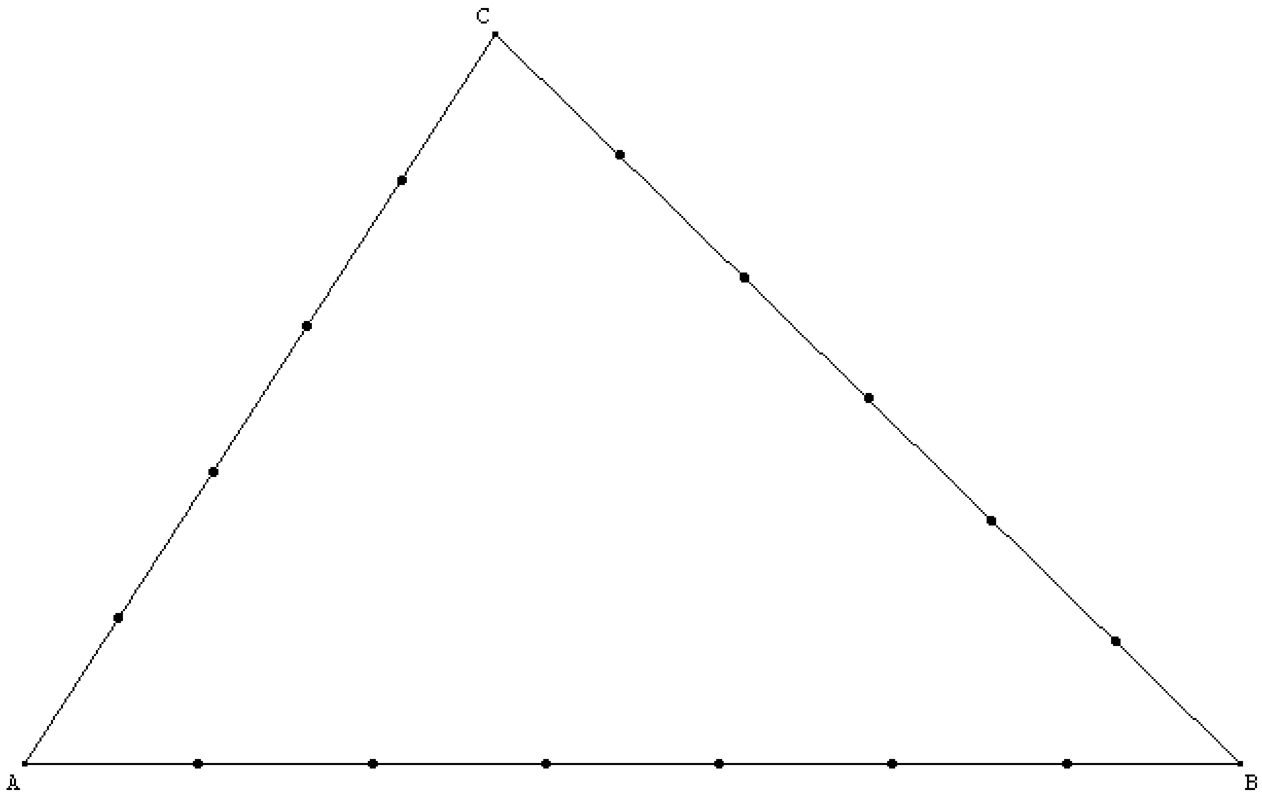
1) Montrer que D est le barycentre de $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$.
2) Déterminer l'ensemble de tous les points M de l'espace tels que : $\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=AD$.
3) Déterminer l'ensemble de tous les points N de l'espace tels que : $\|\overrightarrow{NA}-\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}\|=AN$

Exercice 8

$ABCD$ est un parallélogramme de centre F et $ABCDE$ est la pyramide de base $ABCD$ et de sommet E.
G est l'isobarycentre des cinq points A, B, C, D et E.
Cette configuration est illustrée à l'annexe 2.

1) Prouver que F est l'isobarycentre de quatre points A, B, C et D.
2) Démontrer que: $\overrightarrow{FG}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{FE}$
3) I est le milieu de l'arête $[CD]$ et H le point défini par: $\overrightarrow{IH}=\dfrac{5}{3}\overrightarrow{IG}$.
   a) Démontrer que H appartient au plan (ABE).
   b) Préciser la particularité de H dans le triangle ABE.

Annexe 1:



Annexe 2: