$1^{ère}$ S4 Devoir de contrôle n°6

Vendredi 6 mars 2009.

Exercice 1

Le plan est muni du repère orthonormal direct $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ et du repère polaire $(O ; \vec{i})$.

1) A est le point de coordonnées cartésiennes $(-1; \sqrt{3})$. Quelles sont ses coordonnées polaires ?

2) B est le point de coordonnées cartésiennes $\left(\sin\frac{\pi}{7}; \cos\frac{\pi}{7}\right)$. Quelles sont ses coordonnées polaires ?

3) C a pour coordonnées polaires $(r ; \theta)$ tel que $1 \leqslant r \leqslant 2$ et $-\frac{\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{6}$.

Représenter sur un dessin l'ensemble de tous les points C vérifiant cela.

Exercice 2

Le plan est muni du repère orthonormal direct $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ et du repère polaire $(O ; \vec{i})$.
A est le point de coordonnées polaires $\left(2 ; \frac{\pi}{3}\right)$.

$OABC$ est le carré tel que $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OC}) = -\frac{\pi}{2}$.

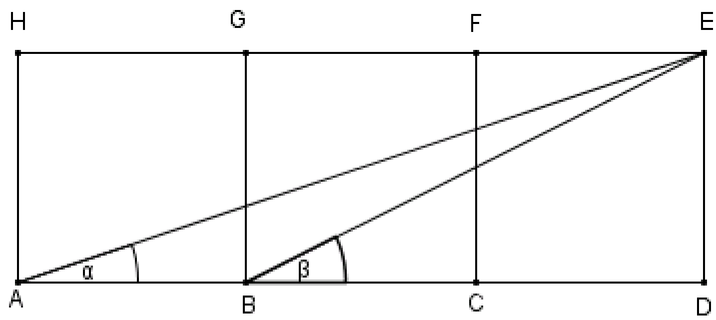
1) Réaliser un dessin en prenant 2 cm pour unité.
2) Déterminer les mesures principales des angles polaires $(\vec{i} ; \overrightarrow{OC})$ et $(\vec{i} ; \overrightarrow{OB})$.
3) En déduire les coordonnées polaires des points C et B.
4) Calculer les coordonnées cartésiennes des points A et C.
5) En déduire que B a pour coordonnées cartésiennes: $(\sqrt{3}+1 ; \sqrt{3}-1)$.
6) Conclure que: $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

Exercice 3

x est un réel appartenant à l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2} ; \pi\right[$ tel que $\sin x = \frac{2}{3}$. Calculer la valeur exacte de $\sin(2x)$.

Exercice 4

Dans le dessin ci-contre, $ABGH$, $BCFG$ et $CDEF$ sont des carrés de coté 1.



1) Démontrer que:

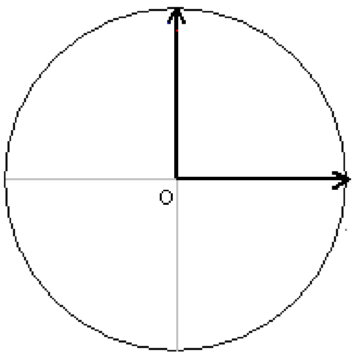
$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$ et $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

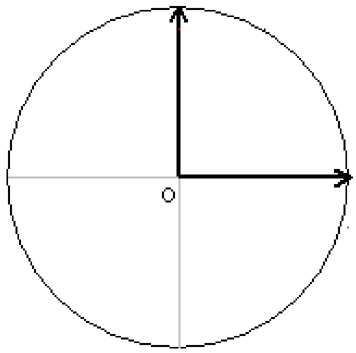
2) Calculer de même $\cos\beta$ et $\sin\beta$.
3) Calculer $\cos(\alpha+\beta)$ et $\sin(\alpha+\beta)$.
4) En déduire la valeur exacte de $(\alpha+\beta)$.

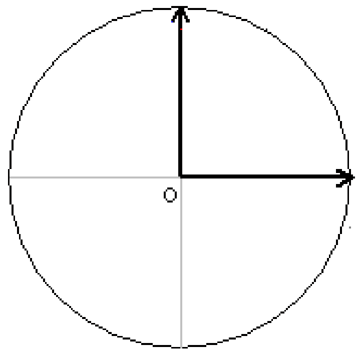
Exercice 5

En utilisant les cercles trigonométriques ci-dessous pour repérer les solutions (marquer en rouge les arcs associés), résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ les inéquations suivantes :

1) $\cos x > \frac{1}{2}$ 2) $\cos x \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 3) $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.







Exercice 6

Dans le tableau ci-dessous, il n'y a que des suites arithmétiques ou des suites géométriques.

Complétez les cases vides .

1er terme u_0	2ème terme u_1	3ème terme u_2	Terme général u_n	Formule de récurrence	Raison	Arithmétique/géométrique
		10		$u_{n+1} = u_n - 3$		
8	13	18				
			$u_n = 3 \times 5^n$			
		16			2	géométrique
	40			$u_{n+1} = 4\,u_n$		
2					10	arithmétique
			$u_n = 1 - 4\,n$			
4	2	1				

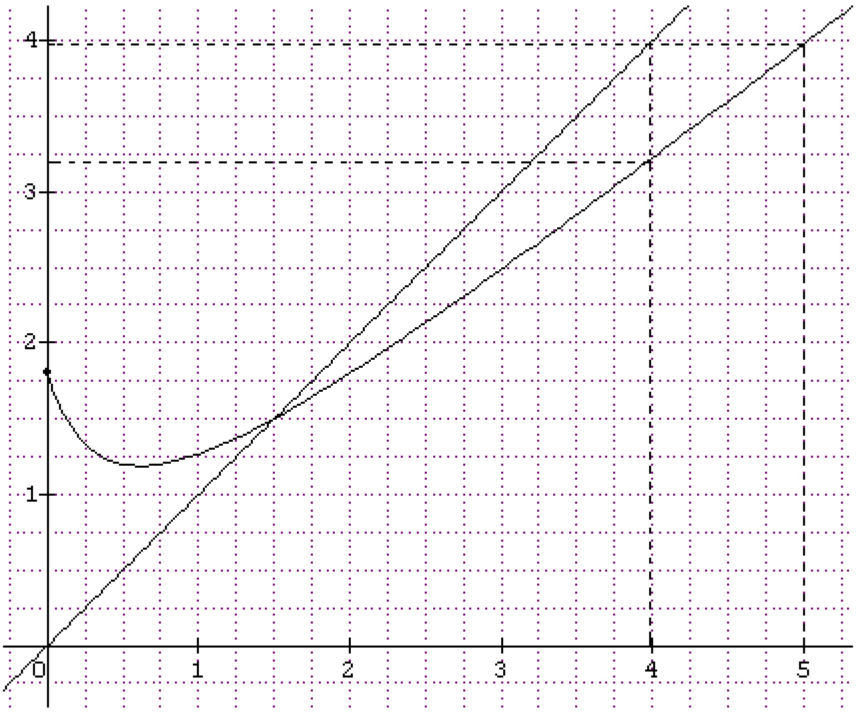
Exercice 7

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^+$ par: $f(x)=\dfrac{8x^2+2x+9}{10x+5}$.

1) Pourquoi f est-elle bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$?
2) Démontrer que $f'(x)=\dfrac{80(x^2+x-1)}{(10x+5)^2}$.
3) Étudier le signe de $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^+$.
4) En déduire que la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n=f(n)$ est strictement croissante.
5) Sur le graphique ci-dessous sont tracées :

- La droite *(D)* d'équation $y=x$.
- La courbe *(C)* représentant la fonction *f.*

Ce graphique représente une suite (V_n) définie par $V_0=5$ et la relation de récurrence: $V_{n+1}=f(V_n)$.
Le but de cette question est de construire graphiquement (sans effectuer de calcul), les termes successif de cette suite (V_n).



a) Placer V_0 sur l'axe des abscisses et V_1 sur les axes des abscisses et des ordonnées.
b) Construire à l'aide de ce même procédé graphique V_2, V_3 et V_4 en plaçant ces nombres sur les axes des abscisses et des ordonnées.
c) Que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite (V_n) ?
d) Lorsque *n* augmente, il semblerait que V_n se rapproche de plus en plus d'un nombre. Lequel ?

Justifier par un calcul la valeur exacte de ce nombre.