$1^{ère}$ S4 Devoir de contrôle n°7

Vendredi 27 mars 2009.

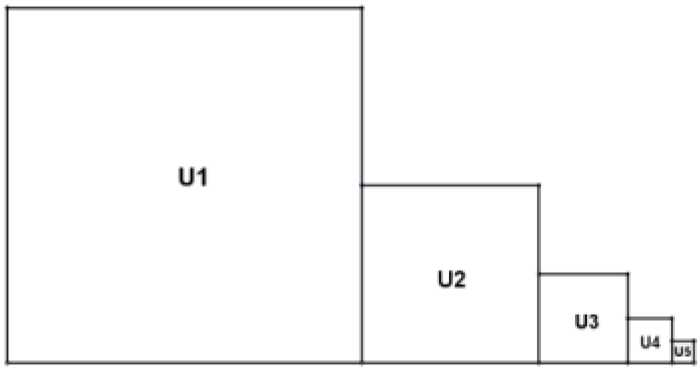
Exercice 1

On additionne les entiers consécutifs de 1 à n ($n \in \mathbb{N}^*$) et l'on obtient 2017036. Déterminer n.

Exercice 2

Sur le dessin ci-contre, on a construit une suite de carrés. Le premier carré a ses côtés de longueur 1. Les carrés suivants sont construits en prenant à chaque étape un carré dont la longueur du côté est la moité de la longueur du précédent.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit ainsi la suite (U_n) des aires de ces carrés.



1) Justifier que (U_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme U_1 et la raison q.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la suite (S_n) par: $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots\ldots\ldots + U_n$.
   a) Donner la formule de calcul de S_n en fonction de l'entier n.
   b) Expliquer pourquoi l'aire S_n ne pourra jamais dépasser $\frac{4}{3}$.

Exercice 3

La suite (U_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par: $U_n = \frac{2n+1}{n+1}$.

1) Prouver que (U_n) est une suite strictement croissante.
2) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a: $1 \leqslant U_n < 2$.

Exercice 4

1) (g_n) est la suite géométrique de premier terme $g_0 = 1$ et de raison 2. Exprimer g_n en fonction de n.
2) (a_n) est la suite arithmétique de premier terme $a_0 = 0$ et de raison 1. Exprimer a_n en fonction de n.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les suites (s_n), (t_n) *et* (u_n) par: $s_n = \sum_{i=0}^{i=n} g_i$, $t_n = \sum_{i=0}^{i=n} a_i$ et $u_n = s_n + t_n$.

   a) Compléter le tableau ci-dessous:

n	0	1	2	3
g_n				
a_n				
s_n				
t_n				
u_n				

   b) Donner les formules exprimant s_n et t_n en fonction de n.

   En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a: $u_n = \frac{2^{n+2} + n^2 + n - 2}{2}$.

Exercice 5

On définit la suite (U_n) par: $U_1 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = \frac{n+1}{2n} U_n$.

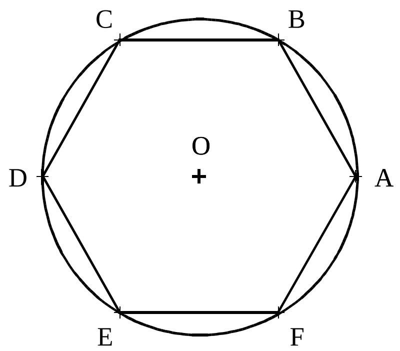
1) Calculer U_2, U_3 et U_4.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la suite (V_n) par: $V_n = \frac{U_n}{n}$.

   a) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q et le premier terme V_1.
   b) En déduire l'expression de V_n en fonction de n.

3) Conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $U_n = \frac{n}{2^n}$.

Exercice 6



ABCDEF est un hexagone régulier inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 2.

Dans le tableau ci-dessous, pour chaque produit scalaire, cocher la bonne réponse.

Aucune justification n'est demandée.
Les mauvaises réponses ne sont pas pénalisées à condition qu'elles ne soient pas multiples sur la même ligne.

	0	2	-2	4	-4	6	-6	8	-8	9	-9	12	16	$2\sqrt{3}$
$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA}$														
$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$														
$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$														
$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD}$														
$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BF}$														
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF}$														
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$														
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE}$														

Exercice 7

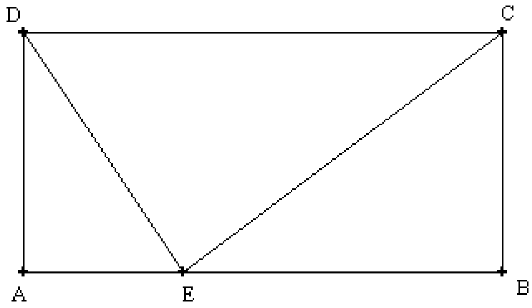
Le plan est muni du repère orthonormal direct $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.
A est le point de coordonnées polaires $\left(1 ; \frac{\pi}{6}\right)$. B est le point de coordonnées polaires $\left(1 ; \frac{\pi}{4}\right)$.

1) Déterminer les coordonnées cartésiennes de A et B dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.
   En déduire la valeur du produit scalaire : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$.

2) A l'aide de la propriété de Chasles, trouver la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB})$.
   En utilisant l'angle précédent, donner une deuxième expression du produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$.

3) En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$.

Exercice 8

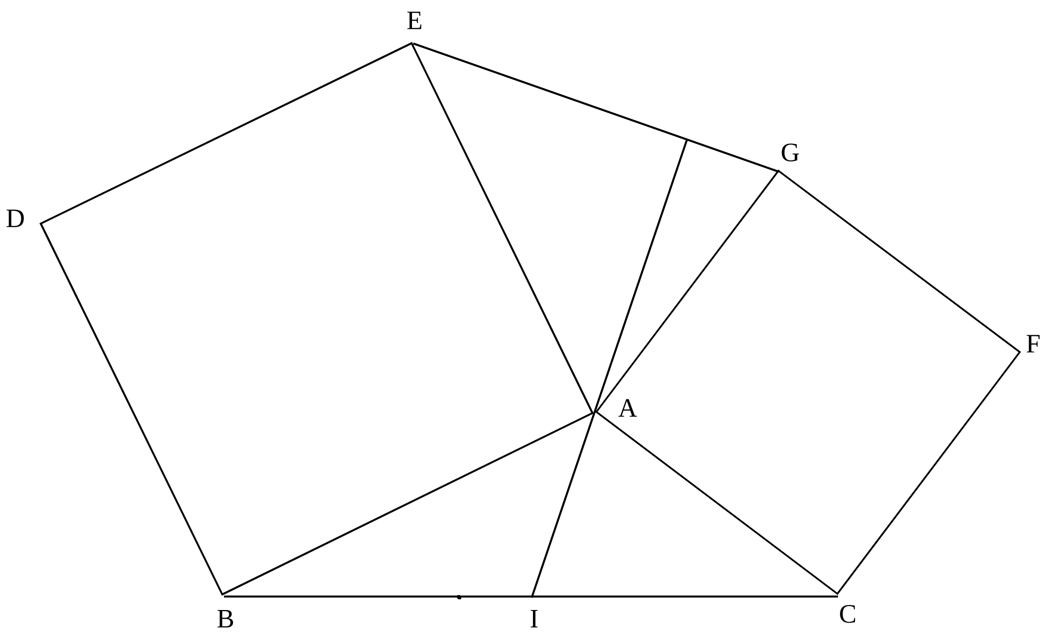


$ABCD$ est un rectangle tel que : $AB=3$ et $AD=\frac{3}{2}$.

E est défini par : $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

1)
   a) En précisant votre démarche, calculer les produits scalaires:
      $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$.
   b) En déduire $\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EC}$.
2)
   a) A l'aide du théorème de Pythagore, calculer les distances ED et EC.
   b) Exprimer $\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EC}$ en utilisant le cosinus de l'angle $\widehat{DEC}$. En déduire le cosinus de $\widehat{DEC}$, puis une approximation à 1° près de la mesure de cet angle.
3) Retrouver directement le résultat de la question précédente en utilisant la formule d'Al-Kashi dans le triangle DEC.

Exercice 9



Dans le dessin ci-dessus, ABC est un triangle quelconque, $ABDE$ et $ACFG$ sont des carrés.
I est le milieu de $[BC]$.
Le but du problème est de prouver que $(AI)\perp(EG)$.

1) Expliquer pourquoi $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AG})=(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AC})$. En déduire que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}$.
2) Exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Exprimer $\overrightarrow{EG}$ en fonction de $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AE}$.
3) Utiliser les résultats précédents pour calculer $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{EG}$. Conclure.