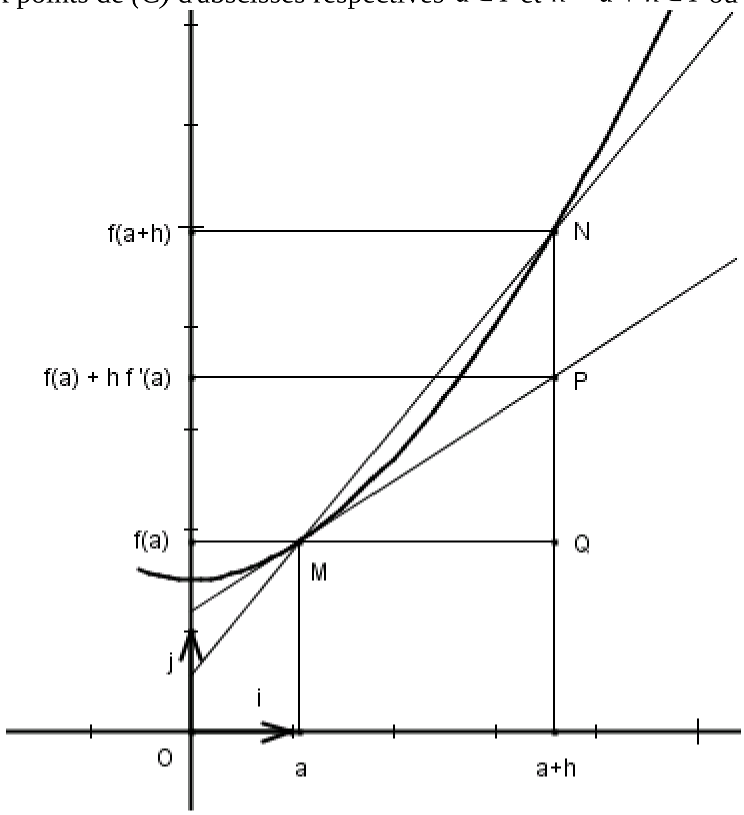
Nombre dérivé - Fonction dérivée - tangente à une courbe

f est une fonction définie sur un intervalle *I*. La courbe *(C)* ci-dessous est la représentation graphique de *f* dans un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

M et *N* sont deux points de *(C)* d'abscisses respectives $a \in I$ et $x = a + h \in I$ où $h \in \mathbb{R}^*$.



M et *N* ont donc pour coordonnées: $M\ (a\ ;\ f\ (a))$ et $N\ (x\ ;\ f\ (x))$ c'est à dire: $N\ (a+h\ ;\ f\ (a+h))$.

On a donc: $\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} x-a \\ f(x)-f(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ f(a+h)-f(a) \end{pmatrix}$

La droite *(MN)* sécante à *(C)* a donc pour coefficient directeur:

$$m = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Si la courbe *(C)* possède en *M* une tangente de coefficient directeur *d*, alors :
lorsque le point *N* se rapproche de *M*, c'est à dire lorsque *x* tend vers *a*, ou, ce qui revient au même, lorsque *h* tend vers 0, les sécantes *(MN)* vont atteindre une position limite qui est celle de la tangente *(MP)* en *M* à *(C)*.
Ceci peut alors se traduire à l'aide des coefficients directeurs par:

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \right] = d \qquad \text{c'est à dire :} \qquad \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \right] = d\ .$$

On a donc: $\lim\limits_{h \to 0} \left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - d \right] = 0$.

Si nous appelons φ, la fonction définie pour $h \neq 0$ et $a+h \in I$ par: $\varphi(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - d$,

on a: $\lim\limits_{h \to 0} [\ \varphi(h)] = 0$ et $h\varphi(h) = f\ (a+h) - f\ (a) - dh$, ce qui s'écrit aussi: $f\ (a+h) = f\ (a) + dh + h\varphi(h)$.

Réciproquement, s'il existe un réel *d* et une fonction φ telle que, pour tout $h \neq 0$ et $a+h \in I$, on ait: $f\ (a+h) = f\ (a) + dh + h\varphi(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} [\varphi(h)] = 0$,

on en déduit que: $\varphi(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - d$ et donc que: $\lim\limits_{h \to 0} \left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \right] = d$.

Ceci nous permet donc de donner les trois définitions **équivalentes**:

Définition 1

Si *f* est une fonction définie sur un intervalle *I* et si $a \in I$.

Lorsqu'il existe un nombre réel *d* tel que, pour tout réel *h* proche de 0, on ait:

$$\lim_{h \to 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right] = d$$

On dit que la fonction *f* est dérivable en *a* et que $d = f'(a)$ est le nombre dérivé de *f* en *a*.

Définition 2

Si *f* est une fonction définie sur un intervalle *I* et si $a \in I$.

Lorsqu'il existe un nombre réel *d* tel que, pour tout réel $x \in I$ et proche de *a*, on ait:

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] = d$$

On dit que la fonction *f* est dérivable en *a* et que $d = f'(a)$ est le nombre dérivé de *f* en *a*.

Définition 3 ***(Cette définition n'est plus explicitement au programme des classes de lycée)***

Si *f* est une fonction définie sur un intervalle *I* et si $a \in I$.

Lorsqu'il existe un nombre réel *d* et une fonction φ, tels que, pour tout réel *h* proche de 0, on ait: $f(a+h) = f(a) + dh + h\varphi(h)$ avec $\lim_{h \to 0} [\varphi(h)] = 0$

On dit que la fonction *f* est dérivable en *a* et que $d = f'(a)$ est le nombre dérivé de *f* en *a*.

Fonction dérivable sur un intervalle I. Fonction dérivée d'une fonction dérivable sur I

On dit que *f* est dérivable sur un intervalle *I* lorsqu'elle est dérivable en tout point de *I*.
Lorsque *f* est dérivable sur un intervalle *I*, la fonction qui à tout $x \in I$ associe le nombre dérivé de *f* en *x* est appelée **fonction dérivée de *f* sur *I***. Cette fonction est notée f' ou $\frac{df}{dx}$.

Remarques sur les notations et méthode pratiquées en sciences expérimentales.

Les physiciens expriment la différence $h = x - a$ par la le symbole Δx (accroissement de la variable *x* au voisinage du point *a*) et la différence $f(x) - f(a)$ par Δy (accroissement correspondant entre les images de *x* et de *a* qu'ils assimilent aux ordonnées *y*).

Avec ces notations, ils écrivent alors au voisinage de a: $\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta x} \right] = f'(a)$.

En notant "*y*" la fonction "*f*", la fonction dérivée de *y* sera notée: $y' = \frac{dy}{dx}$.

La notation $f'(x)$ est due à **Newton** et la notation différentielle $\frac{dy}{dx}$ était utilisée par **Leibniz**.

Une autre méthode est aussi assez souvent utilisées par les physiciens, chimistes, biologistes, économistes, démographes et autres sociologues ou psychologues pour déterminer le nombre dérivé en un point *a* :
Ils évaluent : $\lim_{h \to 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \right]$.
Lorsque la fonction est dérivable en *a*, on obtient ainsi le nombre dérivé, mais **la réciproque est fausse**, car cette limite peut fort bien exister sans que la fonction soit dérivable en *a*.
Des contre-exemples peuvent être trouvés à l'aide de fonctions dont le graphique présentent un point anguleux en *a* : voir par exemple la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x^2 - 1|$ en $a = 1$.

Interprétation graphique du nombre dérivé.

Si *f* est une fonction définie sur un intervalle *I*. Si $a \in I$ et si *f* est dérivable en $x = a$, alors :
La courbe représentative de *f* possède une tangente au point $M\left(a\,;\,f\left(a\right)\right)$ et le coefficient directeur de cette tangente est le nombre dérivé $f\,'\left(a\right)$ de la fonction *f* en $x = a$.

Remarques :

Si le graphique de *f* ne possède pas de tangente au point *M* d'abscisse $x = a$, alors la fonction *f* n'est pas dérivable en *a*. C'est le cas de la fonction valeur absolue en $x = 0$.

Le graphique d'une fonction peut fort bien posséder une tangente en un point sans que la fonction soit dérivable en ce point : il suffit que le coefficient directeur de cette tangente n'existe pas (tangente parallèle à l'axe des ordonnées). C'est le cas de la fonction racine carrée en $x = 0$.

Équation de la tangente à une courbe

Si fonction *f* est dérivable en *a*, la tangente *(MP)* à la courbe *(C)* en *M* d'abscisse $x = a$ existe.
Elle a pour coefficient directeur $m = f\,'\left(a\right)$.
Son équation est donc de la forme: $y = mx + p$, où $m = f\,'\left(a\right)$ et son ordonnée à l'origine *p* peut être calculée.
Il suffit d'écrire que *(MP)* passe par $M\left(a\,;\,f\left(a\right)\right)$.
On a donc: $f\left(a\right) = f\,'\left(a\right) \times a + p$. Ceci donne: $p = f\left(a\right) - af\,'\left(a\right)$.
Donc: $y = f\,'\left(a\right)x + f\left(a\right) - af\,'\left(a\right)$ que l'on écrit souvent sous l'une des formes, plus faciles à retenir:

$$\boldsymbol{y = \left[f\,'\left(a\right)\right]\left(x - a\right) + f\left(a\right)} \qquad \textbf{ou} \qquad \boldsymbol{y - f\left(a\right) = \left[f\,'\left(a\right)\right]\left(x - a\right).}$$

Approximation affine de f au voisinage de *x = a*

D'après ce que nous venons de voir, la tangente *(MP)* à la courbe *(C)* en *M* est la représentation graphique de la fonction affine *g* définie sur $\mathbb{R}$ par : $g\left(x\right) = f\left(a\right) + \left(x - a\right)f\,'\left(a\right)$.

Montrons que cette fonction affine est une approximation de la fonction *f* lorsque *x* est proche de *a*. :

En effet, l'ordonnée du point *P* d'abscisse $x = a + h$ est: $g\left(x\right) = \left[f\,'\left(a\right)\right]\left(x - a\right) + f\left(a\right)$.
que l'on peut écrire: $g\left(a + h\right) = f\,'\left(a\right)\left(a + h - a\right) + f\left(a\right)$, c'est à dire: $g\left(a + h\right) = f\left(a\right) + hf\,'\left(a\right)$.

Or, $f\left(a + h\right) = f\left(a\right) + hf\,'\left(a\right) + h\,\varphi\left(h\right)$ avec $\lim\limits_{h \to 0}\left[\varphi\left(h\right)\right] = 0$, d'après la définition 3.

On en déduit que, **lorsque *h* est voisin de zéro, on a:** $\boldsymbol{f\left(a + h\right) \approx f\left(a\right) + hf\,'\left(a\right).}$

On peut donc conclure que, lorsque *x* est voisin de a : la fonction affine $g : x \mapsto f\left(a\right) + f\,'\left(a\right)\left(x - a\right)$ est une approximation de la fonction $f : x \mapsto f\left(x\right)$.
On peut même montrer (admis ici), que c'est la meilleure approximation affine de *f* au voisinage de *a*.

Cette approximation revient à assimiler la courbe représentative de *f* à sa tangente au voisinage du point de contact.

Remarques concernant les distances:

Au voisinage de *M*, la courbe *(C)* et la tangente *(MP)* sont d'autant plus proches qu'on se rapproche du point *M*.
La cause de ceci est que la distance $PN = \left|h\,\varphi\left(h\right)\right|$ a pour limite 0 lorsque *h* tend vers 0.
Mieux encore, j'attire votre attention sur la remarque suivante:
Lorsque *h* tend vers 0, la distance $QP = \left|hf\,'\left(a\right)\right|$ a aussi pour limite 0, mais $\dfrac{QP}{MQ} = \left|f\,'\left(a\right)\right|$ reste **constante**, alors que $\dfrac{PN}{MQ} = \left|\varphi\left(h\right)\right|$ a pour limite 0, c'est à dire que, mis à part le cas d'une tangente horizontale où $f\,'\left(a\right) = 0$, la distance *PN* se rapproche de 0 beaucoup plus vite que la distance *QP*: on dit parfois que *PN* est "*négligeable*" par rapport à *QP* au voisinage de $x = a$.

Dérivée à droite, dérivée à gauche

Définitions analogues au cas général, en remplaçant limite par limite à gauche ou par limite à droite.