Approximation d'une courbe par la méthode d'Euler.

Problème :

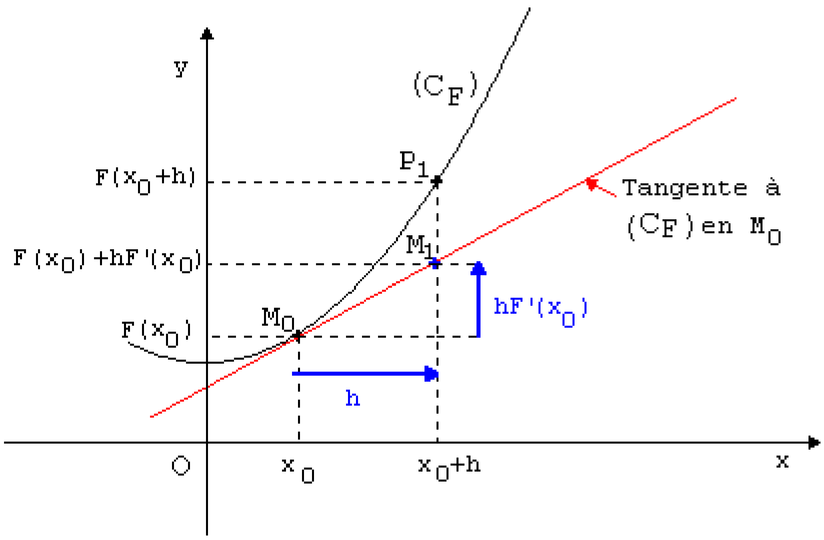
f est une fonction définie sur un intervalle I, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.
On cherche une fonction F, dérivable sur I, telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$ et $F(x_0) = y_0$.

Ce problème sera posé en d'autres termes en classe terminale S :
Déterminer la primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.
Résoudre sur I l'équation différentielle $F' = f$ avec la condition initiale : $F(x_0) = y_0$.

Lorsqu'on ne peut trouver une formule explicite pour F(x), la méthode d'Euler permet de tracer une courbe approchée de celle de F.

Propriété utilisée :

Si F est une fonction dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$.,
Alors, pour tout réel h non nul et proche de 0 tel que $x_0 + h \in I$, on a : $F(x_0 + h) \approx F(x_0) + h\,F'(x_0)$.



Principe de la méthode :

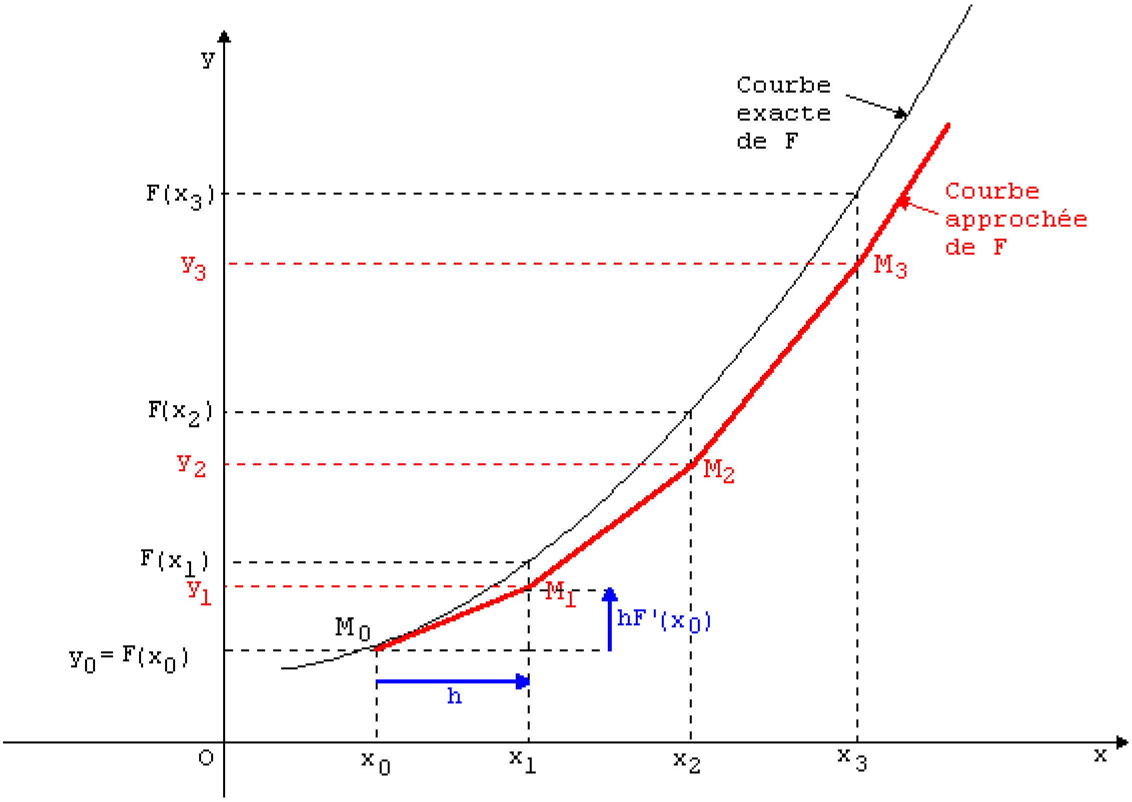
On place le point $M_0\ (x_0 ; y_0)$ qui est un point exact de la courbe inconnue (C) de F .
On choisit un réel h non nul, très proche de 0.
On pose : $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$, …, $x_n = x_{n-1} + h$ (pas h)
On calcule, à l'aide de la propriété citée plus haut, une valeur approchée y_1 de $F(x_1)$, y_2 de $F(x_2)$, , y_n de $F(x_n)$.

F étant dérivable en x_0 , on a donc : $F(x_0 + h) \approx F(x_0) + h\,F'(x_0)$ c'est à dire : $F(x_1) \approx y_0 + h\,f(x_0)$.
En posant : $y_1 = y_0 + h\,f(x_0)$,on obtient : $F(x_1) \approx y_1$.

F étant dérivable en x_1 , on a donc : $F(x_1 + h) \approx F(x_1) + h\,F'(x_1)$ c'est à dire : $F(x_2) \approx y_1 + h\,f(x_1)$.
En posant : $y_2 = y_1 + h\,f(x_1)$, on obtient : $F(x_2) \approx y_2$.

Et ainsi de suite …

On place ensuite les points $M_1(x_1 ; y_1)$, $M_2(x_2 ; y_2)$, …, $M_n(x_n ; y_n)$.
Pour h très proche de 0, la courbe constituée des segments $[M_0M_1]$, $[M_1M_2]$, …, $[M_{n-1}M_n]$ approche la courbe exacte (C) de F. Plus h est proche de 0, plus cette approximation est bonne.
Cette courbe formée de segments de droite, est la représentation graphique d'une fonction affine par intervalles.



<u>Exemple 1</u> :

Utilisons un tableur pour tracer une courbe approchée sur l'intervalle [0 ; 3] de la fonction F définie sur ℝ par :

$F'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ avec la condition initiale : F(0) = 0.

La suite des points $M_n\,(x_n\,;\,y_n)$ a pour coordonnées :

$$x_0 = 0 \quad \text{et} \quad x_n = x_{n-1} + h$$

$$y_0 = 0 \quad \text{et} \quad y_n = y_{n-1} + \frac{h}{1+(x_{n-1})^2}$$

Calculs à l'aide du tableur d'Open Office ou Excel :

Sur la première ligne, entrer les valeurs initiales.

Sur la seconde ligne, écrire les formules ci-dessus en utilisant la référence des cellules concernées.

Étendre ces formules vers le bas à l'aide de la poignée de recopie, jusqu'à faire afficher la valeur finale 3 pour x_n .

Ici la solution F est connue (étudiée à bac +1) : c'est la fonction « arctangente » , notée *atan* par les tableurs et $\tan^{-1}$ par la plupart des calculatrices scientifiques. On peut donc calculer l'ordonnée exacte des points d'abscisse x_n (colonne arctan(x_n)) , l'erreur absolue et l'erreur relative (en %) commise dans l'approximation.

Les formules apparaissent dans la copie d'écran ci-dessous :

	A	B	C	D	E	F
1	Pas h:	0,1				
2	n	xn	y_n	Arctan(x_n)	Erreur absolue	Erreur relative
3	0	0	0	=ATAN(B3)	0	0,00%
4	=A3+1	=B3+B$1	=C3+B$1/(1+B3^2)	=ATAN(B4)	=D4-C4	=E4/C4
5	=A4+1	=B4+B$1	=C4+B$1/(1+B4^2)	=ATAN(B5)	=D5-C5	=E5/C5
6	=A5+1	=B5+B$1	=C5+B$1/(1+B5^2)	=ATAN(B6)	=D6-C6	=E6/C6
7	=A6+1	=B6+B$1	=C6+B$1/(1+B6^2)	=ATAN(B7)	=D7-C7	=E7/C7
8	=A7+1	=B7+B$1	=C7+B$1/(1+B7^2)	=ATAN(B8)	=D8-C8	=E8/C8
9	=A8+1	=B8+B$1	=C8+B$1/(1+B8^2)	=ATAN(B9)	=D9-C9	=E9/C9

Le fichier classeur open office correspondant est téléchargeable sur mon site. Le lien est : http://math.sicard.free.fr/1S/derivation/arctan.ods .

Exemple 2 :

Utilisons un tableur pour tracer une courbe approchée sur l'intervalle [0 ; 2] de la fonction F définie sur ℝ par : $F'(x) = F(x)$ avec la condition initiale : F(0) = 1.

La suite des points $M_n(x_n ; y_n)$ a pour coordonnées :

$x_0 = 0$ et $x_n = x_{n-1} + h$

$y_0 = 1$ et $y_n = y_{n-1} + h\, y_{n-1}$.

Calculs à l'aide du tableur d'Open Office ou Excel :

Sur la première ligne, entrer les valeurs initiales.

Sur la seconde ligne, écrire les formules ci-dessus en utilisant la référence des cellules concernées.

Étendre ces formules vers le bas à l'aide de la poignée de recopie, jusqu'à faire afficher la valeur finale 2 pour x_n.

Ici la solution F est connue (étudiée en TS) : c'est la fonction « exponentielle » , notée *exp* par le tableur et e^x par les calculatrices scientifiques. On peut donc calculer l'ordonnée exacte des points d'abscisse x_n (colonne exp(x_n)) et l'erreur relative commise dans l'approximation.

Les formules apparaissent dans la copie d'écran ci-dessous :

	A	B	C	D	E	F
1	Pas h:	0,1				
2	n	xn	y_n	Exp(x_n)	Erreur absolue	Erreur relative
3	0	0	1	=EXP(B3)	0	0,00%
4	=A3+1	=B3+B$1	=C3+B$1*C3	=EXP(B4)	=D4-C4	=E4/C4
5	=A4+1	=B4+B$1	=C4+B$1*C4	=EXP(B5)	=D5-C5	=E5/C5
6	=A5+1	=B5+B$1	=C5+B$1*C5	=EXP(B6)	=D6-C6	=E6/C6
7	=A6+1	=B6+B$1	=C6+B$1*C6	=EXP(B7)	=D7-C7	=E7/C7
8	=A7+1	=B7+B$1	=C7+B$1*C7	=EXP(B8)	=D8-C8	=E8/C8
9	=A8+1	=B8+B$1	=C8+B$1*C8	=EXP(B9)	=D9-C9	=E9/C9

Le fichier classeur open office correspondant est téléchargeable sur mon site. Le lien est : http://math.sicard.free.fr/1S/derivation/exp.ods .

Exemple 3 :

Utilisons un tableur pour tracer une courbe approchée sur l'intervalle [1 ; 4] de la fonction F définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $F'(x) = \sqrt{x}$ avec la condition initiale : F(1) = $\frac{2}{3}$.

La suite des points $M_n(x_n ; y_n)$ a pour coordonnées :

$x_0 = 1$ et $x_n = x_{n-1} + h$

$y_0 = \frac{2}{3}$ et $y_n = y_{n-1} + h\sqrt{x_{n-1}}$

Calculs à l'aide du tableur d'Open Office ou Excel :

Sur la première ligne, entrer les valeurs initiales.

Sur la seconde ligne, écrire les formules ci-dessus en utilisant la référence des cellules concernées.

Étendre ces formules vers le bas à l'aide de la poignée de recopie, jusqu'à faire afficher la valeur finale 4 pour x_n .

Ici la solution F est connue. Vous pouvez vérifier en la dérivant que $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$. On peut donc calculer l'ordonnée exacte des points d'abscisse x_n (colonne F(x_n)) , l'erreur absolue et l'erreur relative (en %) commise dans l'approximation.

Les formules apparaissent dans la copie d'écran ci-dessous :

	A	B	C	D	E	F
1	Pas h:	0,1				
2	n	xn	y_n	$F(x_n)$	Erreur absolue	Erreur relative
3	0	1	=2/3	=(2/3)*B3*RACINE(B3)	0	0,00%
4	=A3+1	=B3+B$1	=C3+B$1*RACINE(B3)	=(2/3)*B4*RACINE(B4)	=D4-C4	=E4/D4
5	=A4+1	=B4+B$1	=C4+B$1*RACINE(B4)	=(2/3)*B5*RACINE(B5)	=D5-C5	=E5/D5
6	=A5+1	=B5+B$1	=C5+B$1*RACINE(B5)	=(2/3)*B6*RACINE(B6)	=D6-C6	=E6/D6
7	=A6+1	=B6+B$1	=C6+B$1*RACINE(B6)	=(2/3)*B7*RACINE(B7)	=D7-C7	=E7/D7
8	=A7+1	=B7+B$1	=C7+B$1*RACINE(B7)	=(2/3)*B8*RACINE(B8)	=D8-C8	=E8/D8
9	=A8+1	=B8+B$1	=C8+B$1*RACINE(B8)	=(2/3)*B9*RACINE(B9)	=D9-C9	=E9/D9

Le fichier classeur open office correspondant est téléchargeable sur mon site. Le lien est : http://math.sicard.free.fr/1S/derivation/racine.ods

Exemple 4 :

Utilisons un tableur pour tracer une courbe approchée sur l'intervalle [1 ; 3] de la fonction F définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $F'(x) = \frac{1}{x}$ avec la condition initiale : F(1) = 0.

La suite des points $M_n(x_n ; y_n)$ a pour coordonnées :

$x_0 = 1$ et $x_n = x_{n-1} + h$

$y_0 = 0$ et $y_n = y_{n-1} + \frac{h}{y_{n-1}}$.

Calculs à l'aide du tableur d'Open Office ou Excel :

Sur la première ligne, entrer les valeurs initiales.

Sur la seconde ligne, écrire les formules ci-dessus en utilisant la référence des cellules concernées.

Étendre ces formules vers le bas à l'aide de la poignée de recopie, jusqu'à faire afficher la valeur finale 3 pour x_n.

Ici la solution F est connue (étudiée en TS) : c'est la fonction « logarithme népérien » , notée *ln* par le tableur et les calculatrices scientifiques. On peut donc calculer l'ordonnée exacte des points d'abscisse x_n (colonne $\ln(x_n)$) et l'erreur relative commise dans l'approximation.

Les formules apparaissent dans la copie d'écran ci-dessous :

	A	B	C	D	E	F
1	Pas h:	0,1				
2	n	xn	y_n	$\ln(x_n)$	Erreur absolue	Erreur relative
3	1	1	0	=LN(B3)	0	0,00%
4	=A3+1	=B3+B$1	=C3+B$1*1/(B3)	=LN(B4)	=D4-C4	=E4/D4
5	=A4+1	=B4+B$1	=C4+B$1*1/(B4)	=LN(B5)	=D5-C5	=E5/D5
6	=A5+1	=B5+B$1	=C5+B$1*1/(B5)	=LN(B6)	=D6-C6	=E6/D6
7	=A6+1	=B6+B$1	=C6+B$1*1/(B6)	=LN(B7)	=D7-C7	=E7/D7
8	=A7+1	=B7+B$1	=C7+B$1*1/(B7)	=LN(B8)	=D8-C8	=E8/D8
9	=A8+1	=B8+B$1	=C8+B$1*1/(B8)	=LN(B9)	=D9-C9	=E9/D9

Le fichier classeur open office correspondant est téléchargeable sur mon site. Le lien est : http://math.sicard.free.fr/1S/derivation/ln.ods .