$1^{ère}S_1$ Devoir à la maison n°13

Pour Lundi 3 Mai 1999.

A) Préliminaires:

Le but du problème est de résoudre l'équation générale du troisième degré: $aX^3 + bX^2 + cX + d = 0$ en fonction des coefficients réels a, b, c et d. (On suppose bien sûr que $a \neq 0$).

Afin de simplifier cette étude, montrer que, grâce au changement d'inconnue: $x = X + \dfrac{b}{3a}$, notre équation de départ peut s'écrire sous la forme: $ax^3 + tx + u = 0$, où les réels t et u sont à exprimer en fonction des coefficients a, b, c et d.

Terminer la simplification en montrant que cette équation est équivalente à une équation de la forme: $x^3 + px + q = 0$ où p et q sont des réels.

Nous venons de démontrer que l'équation générale du troisième degré peut toujours se ramener à la résolution d'une équation du type: $x^3 + px + q = 0$ où p et q sont des coefficients réels. C'est donc l'étude de ce type d'équation simplifiée que nous allons mener!

B) Étude du problème:

I) Étude de la fonction polynôme associée à l'équation:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x^3 + px + q$

1) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) Calculer $f'(x)$ Montrer que le sens de variation de f dépend du signe de p.

3) Réaliser le tableau des variations de f dans les trois cas: $p > 0$, $p = 0$, $p < 0$.

4) En utilisant le sens de variation et les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, montrer que dans les trois cas, il existe deux réels A et B ($A < B$) tels que:

   a) Pour tout $x > B$, on ait: $f(x) > f(B) > 0$.

   b) Pour tout $x < A$, on ait: $f(x) < f(A) < 0$.

II) Étude du cas: $p > 0$:

1) En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires sur [A ; B], montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique $x_0 \in [\, A ; B \,]$.

2) Conclure en utilisant les résultats du I)4), que l'équation $f(x) = 0$ possède une seule solution dans $\mathbb{R}$.

III) Étude du cas: $p = 0$:

Procéder de façon analogue au II), mais en expliquant comment vous évacuez le problème: $f'(0) = 0$.

Conclure de la même façon, que l'équation $f(x) = 0$ possède une seule solution dans $\mathbb{R}$.

IV) Étude du cas: $p < 0$:

Le tableau des variations de f montre l'existence de deux réels α et β où $f(\alpha)$ est un maximum local et $f(\beta)$ un minimum local.

1) Si $f(\alpha) > f(\beta) > 0$

   a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur l'intervalle $[\, \alpha ; +\infty [$.

   b) En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[\, A ; \alpha \,]$, montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique $x_0 \in [\, A ; \alpha \,]$.

   c) Conclure en utilisant les résultats du I) 4), que l'équation $f(x) = 0$ possède une seule solution dans $\mathbb{R}$.

2) Si $f(\beta) < f(\alpha) < 0$

   a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur l'intervalle $]-\infty ; \beta \,]$.

   b) En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[\, \beta ; B \,]$, montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique $x_0 \in [\, \beta ; B \,]$.

   c) Conclure en utilisant les résultats du I) 4), que l'équation $f(x) = 0$ possède une seule solution dans $\mathbb{R}$.

3) Si $f(\beta) < 0 < f(\alpha)$

a) En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires sur les intervalles $[A ; \alpha]$, $[\alpha ; \beta]$ et $[\beta ; B]$, montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède trois solutions: $x_0 \in [A ; \alpha]$, $x_1 \in [\alpha ; \beta]$, $x_2 \in [\beta ; B]$.

b) Conclure en utilisant les résultats du I) 4), que l'équation $f(x) = 0$ possède trois solutions dans $\mathbb{R}$.

4) Si $f(\alpha) = 0$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède deux solutions dans $\mathbb{R}$: $x_0 = \alpha$ et $x_1 \in [\beta ; B]$.

5) Si $f(\beta) = 0$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède deux solutions dans $\mathbb{R}$: $x_0 = \beta$ et $x_1 \in [A ; \alpha]$.

V) <u>Synthèse générale selon la valeur des coefficients p et q</u>:

Nous avons prouvé dans le IV) que l'équation $f(x) = 0$ avait au moins une solution dans $\mathbb{R}$. Le but de cette question est de trouver à quelle condition portant sur les coefficients p et q, cette équation peut avoir une, deux ou trois solutions dans $\mathbb{R}$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a trois solutions dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $p < 0$ et $f(\alpha) \times f(\beta) < 0$.

2) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ a trois solutions dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $4p^3 + 27q^2 < 0$.

3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $4p^3 + 27q^2 = 0$.

4) Déduire des questions précédentes, que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $4p^3 + 27q^2 > 0$.

VI) <u>Recherche d'une formule pour les solutions</u>:

1) Dans le cas où $p = 0$, la formule est évidente. La donner.

2) On suppose dans la suite du devoir que $p \neq 0$.

a) En posant $x = u + v$, montrer que l'équation $f(x) = 0$ s'écrit:

$$(u^3 + v^3 + q) + (3uv + p)(u + v) = 0$$

b) Montrer que si $(u_0 ; v_0)$ est solution du système: $\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u\,v = -\dfrac{p}{3} \end{cases}$

alors $x_0 = u_0 + v_0$ est solution de l'équation $f(x) = 0$.

c) En déduire que le problème est résolu si l'on est capable de résoudre le système:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3\,v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \end{cases} \quad \text{et donc l'équation:} \quad U^2 + q\,U - \frac{p^3}{27} = 0.$$

d) En déduire que, si $4p^3 + 27q^2 > 0$, on trouve deux solutions pour le système:

$$(u^3 ; v^3) = \left(\frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} ; \frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} \right) \text{ ou } (u^3 ; v^3) = \left(\frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} ; \frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} \right)$$

e) Déduire de la question précédente la solution unique de l'équation $f(x) = 0$:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

f) Si $4p^3 + 27q^2 = 0$, montrer que la méthode précédente livre une solution sur les deux attendues. A l'aide d'un exemple bien choisi, montrer comment faire pour trouver l'autre solution.

g) Si $4p^3 + 27q^2 < 0$, dire pourquoi cette méthode ne permet pas de trouver, avec les nombres réels, les trois solutions attendues. Si cela peut vous rassurer, vous verrez en classe terminale, comment passer outre. C'est d'ailleurs ce que firent les algébristes italiens du 16ème siècle comme Cardan, Tartaglia, Bombelli, en inventant les nombres qu'ils appelèrent « imaginaires » et donnèrent naissance à la théorie des nombres complexes.