

1^{ère} S₂ Devoir à la maison n°6

Pour Mercredi 26 Novembre 1997

ABC est un triangle inscrit dans un cercle (\mathcal{C}) de centre O et de rayon r.

1) Faire un dessin en prenant $AB=14$ cm, $AC=12$ cm et $BC=10$ cm.

A' est le milieu de [BC], B' est le milieu de [AC], C' est le milieu de [AB].

G est le centre de gravité du triangle ABC.

A₁ est le projeté orthogonal de A sur (BC), B₁ est le projeté orthogonal de B sur (AC), C₁ est le projeté orthogonal de C sur (AB).

H est l'orthocentre du triangle ABC.

2) On note h l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$.

a) Déterminer les images des points A, B et C par l'homothétie h. Détailler le raisonnement pour le point A.

b) Déterminer les images des hauteurs (AA₁), (BB₁) et (CC₁) par l'homothétie h. Détailler le raisonnement pour la droite (AA₁).

c) En déduire l'image de l'orthocentre H par l'homothétie h.

En déduire que: O, G et H sont alignés.

d) Soit (\mathcal{C}') l'image de (\mathcal{C}) par l'homothétie h. Déterminer son centre O' et son rayon r'.

Tracer (\mathcal{C}').

e) Montrer que O' est le milieu de [OH].

f) Montrer que (\mathcal{C}') passe par A', B' et C'.

3) Nous avons vu en classe qu'il existait deux homothéties transformant un cercle en un cercle de rayon différent: L'une est de rapport positif et l'autre de rapport négatif.

Soit h' l'homothétie de rapport positif transformant (\mathcal{C}) en (\mathcal{C}').

a) Quel est le rapport de h' ?

b) Déterminer le centre de h'.

c) En utilisant h', montrer que les milieux respectifs A₂, B₂ et C₂ des segments [HA], [HB] et [HC], appartiennent au cercle (\mathcal{C}').

4) Soient A'', B'' et C'' les projetés orthogonaux de O' sur les droites (BC), (AC) et (AB).

En utilisant ces points et les projetés orthogonaux de O et de H sur (BC), (AC) et (AB), montrer que les points A₁, B₁ et C₁ appartiennent aussi au cercle (\mathcal{C}').

NB: Le cercle (\mathcal{C}') est appelé le cercle d'Euler du triangle ABC. On l'appelle aussi parfois, comme vous le comprendrez aisément, le cercle des neuf points du triangle ABC.