$1^{\text{ère}}S_2$ *Devoir à la maison n°12*

Pour Lundi 2 Mars 1998

Dans ce problème, on se propose d'étudier les intersections de cercles et de paraboles dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

I) A tout réel r strictement positif, on associe le cercle (C_r) de centre O et de rayon r.
Nous avons vu dans le devoir à la maison n° 11 que l'équation de ce cercle est: $x^2 + y^2 = r^2$.
D'autre part, à tout réel non nul a, on associe la parabole (P_a) d'équation $y = ax^2$.

1) Démontrer que, quels que soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $r \in \mathbb{R}^{+*}$, (P_a) et (C_r) ont toujours deux points d'intersection A et B dont on donnera les coordonnées en fonction de a et r.

2) Déterminer les réels a et r pour lesquels (P_a) et (C_r) se coupent en A(1;1).

II) Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 1.
A tout réel non nul b, on associe la parabole (P_b) d'équation $y = x^2 + b$.

1) En prenant 8 cm comme unité, représenter dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le cercle (C) et les paraboles (P_b) pour les valeurs suivantes de b: -2, $-\frac{5}{4}$, $-\frac{9}{8}$, -1, 0, 1 et $\frac{3}{2}$.

D'après les graphiques réalisés, il semble que le nombre de points d'intersection de (C) et de (P_b) soit: 0, 1, 2, 3 ou 4, selon les valeurs prises par le réel b. Le but de cette partie est de déterminer pour quelles valeurs de b ces différents cas se produisent.

2) Montrer que l'abscisse x d'un point d'intersection de (C) et (P_b) est nécessairement solution d'une équation du quatrième degré bicarrée.

3) Montrer que, par le changement d'inconnue $X = x^2$, on obtient une équation du second degré de discriminant $\Delta = 4b + 5$.

4) En utilisant les résultats des questions précédentes, montrer que:

a) Lorsque $b < -\frac{5}{4}$, (C) et (P_b) n'ont aucun point d'intersection.

b) Lorsque $b = -\frac{5}{4}$, (C) et (P_b) ont deux points d'intersection A_1 et A_2 dont on calculera les coordonnées.

5) Lorsque $b > -\frac{5}{4}$, montrer que les abscisses x cherchées vérifient les équations:

$$x^2 = \frac{-2b - 1 - \sqrt{4b+5}}{2} \quad \text{ou} \quad x^2 = \frac{-2b - 1 + \sqrt{4b+5}}{2}$$

6) En étudiant le signe des expressions $-2b - 1 - \sqrt{4b+5}$ et $-2b - 1 + \sqrt{4b+5}$ selon les valeurs du réel $b \in \left]-\frac{5}{4};+\infty\right[$, montrer que:

a) Si $b \in \left]-\frac{5}{4};-1\right[$, (C) et (P_b) ont quatre points d'intersection: A_1, A_2, A_3 et A_4 dont on donnera les coordonnées en fonction de b.

b) Si b = -1, (C) et (P_{-1}) ont trois points d'intersection: A_1, A_2 et A_3. dont on donnera les coordonnées.

c) Si $b \in \left]-1;1\right[$, (C) et (P_b) ont deux points d'intersection: A_1 et A_2 dont on donnera les coordonnées en fonction de b.

d) Si b = 1, (C) et (P_1) ont un point d'intersection: A_1 dont on donnera les coordonnées.

e) Si $b \in \left]1;+\infty\right[$, (C) et (P_b) n'ont aucun point d'intersection.

7) Étude de cas particuliers:

a) Calculer les coordonnées des points d'intersection de (C) et (P_0).

b) Déterminer la valeur du réel b pour lequel (C) et (P_b) se coupent en deux points:

$$A_1\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{et} \quad A_2\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$