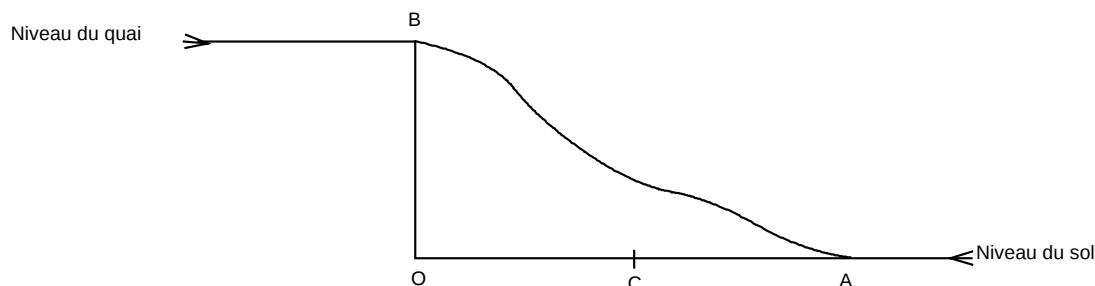


1^{ère} S₂ Devoir à la maison n°14

Pour Jeudi 23 Avril 1998

Une usine de produits chimiques dangereux souhaite faire construire une rampe inclinée en pente douce permettant à des chariots de franchir un dénivelé de 1m entre le sol et un quai, selon le schéma ci-dessous:



Les chariots devant emprunter cette rampe transportent parfois de la nitroglycérine. Pour d'évidentes raisons de sécurité, cette rampe devra être tangente au sol au point A et tangente en B au niveau du sol du quai. O est le projeté orthogonal de B sur le sol. Pour faciliter votre étude, on exprimera les coordonnées des points et les équations des courbes dans le repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OB})$, comme indiqué sur le dessin.

A) Dans un premier projet, on prévoit une emprise au sol de 2m, c'est à dire: $OA = 2$

1) Une rampe rectiligne peut-elle convenir? Pourquoi?

Une rampe formée d'une ligne brisée peut-elle convenir? Pourquoi?

2) Une rampe formée d'un arc de parabole peut-elle convenir? Pourquoi?

3) Une rampe formée d'un arc de cercle peut-elle convenir? Pourquoi?

4) Montrer qu'on peut trouver une solution formée de deux arcs de parabole de sommets respectifs A et B se raccordant en étant tangents en un point I d'abscisse 1. Donner les équations des deux paraboles trouvées. Vérifier que la pente maximum de cette rampe est obtenue au point I. Quelle est cette pente?

NB: La pente de la rampe en un point est la valeur absolue du coefficient directeur de la tangente à la courbe en ce point. En effet, le repère étant orthonormal, la pente "mathématique" est le coefficient directeur, mais les courbes utilisées étant ici des graphiques de fonctions décroissantes, les coefficients directeurs des tangentes sont donc négatifs, c'est à cause de cela que l'on prend comme "pente physique", la valeur absolue du coefficient directeur des tangentes!

5) Montrer qu'on peut trouver une solution formée de deux arcs de cercle se raccordant en étant tangents en un point I d'abscisse 1. Déterminer les centres et les rayons de ces deux cercles. Montrer que la pente maximum de cette rampe est obtenue au point I. Quelle est cette pente?

6) On décide de donner à la rampe un profil d'équation $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Déterminer les réels a, b, c et d donnant la solution du problème. Quelle est la pente maximum de la rampe? En quel point l'obtient-on?

B) La commission de sécurité chargée de contrôler la conformité de la rampe avec la réglementation en vigueur, impose la contrainte suivante: "La pente de la rampe ne doit en aucun cas dépasser 10%."

L'étude précédente nous a montré que l'emprise au sol doit être supérieure à 2m. Notons $s = OA > 2$, la nouvelle emprise au sol de la rampe à construire.

1) Déterminer la valeur minimale de s pour qu'on puisse construire une solution formée de deux arcs de parabole de sommets respectifs A et B se raccordant en étant tangents en un point I d'abscisse $s/2$ et respectant la nouvelle contrainte de la commission de sécurité.

2) Déterminer la valeur minimale de s pour qu'on puisse construire une solution formée de deux arcs de cercle se raccordant en étant tangents en un point I d'abscisse $s/2$ et respectant la nouvelle contrainte de la commission de sécurité.

6) Déterminer la valeur minimale de s pour qu'on puisse construire une rampe ayant un profil d'équation $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ et respectant la nouvelle contrainte de la commission de sécurité.

7) Si vous étiez ingénieur-conseil de cette usine, quelle solution préconiseriez-vous? Pourquoi? D'autres solutions que celles envisagées précédemment, seraient-elles plus efficaces? Faire des propositions, en présentant les avantages et les inconvénients qu'elles engendrent!