$1^{ère}S_2$ Devoir à la maison n°5

Pour Mercredi 13 Décembre 2006

Le but du problème est de montrer que la notion de « tangente à un cercle » étudiée en collège est un cas particulier (sauf dans les cas où cette tangente est parallèle à l'axe des ordonnées), de la notion nouvelle de « tangente à une courbe » mise en évidence cette année avec le nombre dérivé.

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O et de rayon r. Choisissons un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ayant pour origine le centre O de $(\mathscr{C})$.

1) Expliquer pourquoi le cercle $(\mathscr{C})$ ne peut être la représentation graphique d'une fonction.

2) Soit M(x ; y) . Montrer que: $M \in (\mathscr{C})$ équivaut à: $x^2 + y^2 = r^2$.

3) Appelons $(\mathscr{C}_1)$ le demi-cercle correspondant aux points de $(\mathscr{C})$ dont les ordonnées sont positives ou nulles.

Montrer que le demi-cercle $(\mathscr{C}_1)$ est la représentation graphique de la fonction f définie sur l'intervalle [−r ; r] par: $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Afin d'éliminer les deux cas où la tangente au cercle $(\mathscr{C})$ est parallèle à l'axe des ordonnées, nous allons restreindre l'étude de f à l'intervalle ouvert] −r ; r [.

4) Soit M un point de $(\mathscr{C}_1)$ dont l'abscisse est un nombre réel $x \in]-r ; r[$.

Soit N un autre point de $(\mathscr{C}_1)$ dont l'abscisse est un nombre réel $x+h \in]-r ; r[$ avec $h \neq 0$.

Appelons $d_x(h)$ le coefficient directeur de la sécante (MN) à $(\mathscr{C}_1)$.

En utilisant l'égalité: $[f(x+h)]^2 - [f(x)]^2 = [f(x+h) - f(x)] \times [f(x+h) + f(x)]$,

montrer que: $d_x(h) = \dfrac{-2x - h}{\sqrt{r^2 - (x+h)^2} + \sqrt{r^2 - x^2}}$.

5)

a) Expliquer pourquoi : $\lim\limits_{h \to 0} [d_x(h)] = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$.

b) En déduire le coefficient directeur de la tangente (T) à $(\mathscr{C}_1)$ en M.

c) En déduire que f est dérivable sur] −r ; r [et que, pour tout $x \in]-r ; r[$, on a:

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} .$$

6) Calculer le coefficient directeur de la droite (OM).

7) En comparant les coefficients directeurs de (T) et de (OM), vérifier que, pour ce demi-cercle, la nouvelle définition de la tangente correspond bien à celle qui était utilisée dans les classes antérieures dans le cas particulier du cercle.

8) Appelons $(\mathscr{C}_2)$ le demi-cercle correspondant aux points de $(\mathscr{C})$ dont les ordonnées sont négatives.

a) Montrer que le demi-cercle $(\mathscr{C}_2)$ est la représentation graphique de la fonction g définie sur l'intervalle]−r ; r [par: g(x) = −f(x).

b) En déduire que g est dérivable en tout point $x \in]-r ; r[$ et que g '(x) = −f '(x).

c) En appelant (T) la tangente à $(\mathscr{C}_2)$ en M(x ; g(x)), montrer qu'ici aussi, on a: $(T) \perp (OM)$.

9)

a) Montrer que la formule de f '(x) trouvée à la question 5 ne peut pas être utilisée pour x = −r ni pour x = r.

b) Expliquer pourquoi, bien que le cercle possède une tangente aux points d'abscisses x = −r et x = r, la fonction f n'est pas dérivable (à droite) en x = −r , ni (à gauche) en x = r.