# $1^{ère}$ ST   Devoir à la maison n° 4

Pour Mercredi 6 Novembre 1996

**Préliminaire:**

Dans le plan, on se donne une droite (MN) et un point P.

Démontrer la propriété:

$\{ P \in (MN) \} \Leftrightarrow \{$ Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que P soit le barycentre de $(M;x)$ , $(N;1-x)$ $\}$

**Problème:**

ABC est un triangle. A', B' et C' sont trois points tels que: $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$.

D'après le préliminaire, il existe trois nombres réels a, b et c tels que:

A' est le barycentre de $(B,a)$ , $(C,1-a)$.

B' est le barycentre de $(C,b)$ , $(A,1-b)$.

C' est le barycentre de $(A,c)$ , $(B,1-c)$.

***Le problème consiste à déterminer les propriétés des nombres a, b et c pour que les trois points A', B' et C' soient alignés.***

**I)** Étude des cas particuliers où A', B', C' seraient situés sur un ou plusieurs des sommets A, B ou C.

1) Montrer que cette éventualité n'est réalisable que lorsque a, b ou c prennent l'une des valeurs 0 ou 1.

2) Montrer que le cas: a=b=c=0 et le cas: a=b=c=1 excluent l'alignement des points A', B', C'.

3) Montrer que si:

[ a=b=0 et c=1 ] ou [ a=c=0 et b=1 ] ou [ b=c=0 et a=1 ] ou

[ a=b=1 et c=0 ] ou [ a=c=1 et b=0 ] ou [ b=c=1 et a=0 ] ou

[ a=0 et b=1 et c≠0 et c≠1 ] ou [ b=0 et c=1 et a≠0 et a≠1 ] ou [ c=0 et a=1 et b≠0 et b≠1 ]

on est dans la situation où deux des trois points A', B', C' sont confondus, et donc, l'alignement est assuré!

4) Montrer que si:

[ a=0 et c=1 et b≠0 et b≠1 ] ou [ b=0 et a=1 et c≠0 et c≠1 ] ou [ c=0 et b=1 et a≠0 et a≠1 ]

On obtient les trois points A', B' et C' alignés sur un côté du triangle.

5) Montrer que si:

[ a=0 et b≠0 et b≠1 et c≠0 et c≠1 ] ou [ b=0 et a≠0 et a≠1 et c≠0 et c≠1 ] ou

[ c=0 et b≠0 et b≠1 et a≠0 et a≠1 ] ou [ a=1 et b≠0 et b≠1 et c≠0 et c≠1 ] ou

[ b=1 et a≠0 et a≠1 et c≠0 et c≠1 ] ou [ c=1 et b≠0 et b≠1 et a≠0 et a≠1 ]

l'alignement de A', B' et C' est impossible.

*Tous ces cas particuliers ayant été envisagés, dans la suite du problème, les nombres a, b et c seront donc supposés différents de 0 et de 1.*

**II)** Étude des cas particuliers où l'alignement est à exclure, à cause du parallélisme de deux droites

C'est à dire:

1) Montrer que l'alignement des points A', B' et C' est impossible lorsque (A'B')//(AB) ou (B'C')//(BC) ou (A'C')//(AC).

2) En déduire que, pour que A', B' et C' soient alignés, il est nécessaire d'avoir:

$a+b\neq 1$ et $b+c\neq 1$ et $c+a\neq 1$ .

*Dans la suite du problème, on suppose donc que a, b et c sont différents de 0 et de 1 et que $a+b\neq 1$ et $b+c\neq 1$ et $c+a\neq 1$ .*

**III)** 1) Montrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base.

2) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{B'A'}$ et $\overrightarrow{B'C'}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

3) En déduire l'égalité:

$$(1-c)\,\overrightarrow{B'A'} - a\,\overrightarrow{B'C'} = \left[(1-a-b)(1-c)+ab\right]\cdot\overrightarrow{AC}$$

4) Conclure que, lorsque a b et c sont différents de 0 et de 1 et $a+b\neq 1$ et $b+c\neq 1$ et $c+a\neq 1$, on a:

A'B'C' alignés $\Leftrightarrow (a-1)(b-1)(c-1) = abc$ .