$1^{ère}$ ST   Devoir à la maison n° 5

Pour Mercredi 27 Novembre 1996

Pour simplifier, nous supposerons que les fonctions f et g ont le même ensemble de définition D. Soient $a\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$. On définit alors les fonctions:

$h = f+g$ est définie sur D par $h(x) = (f+g)(x) = f(x)+g(x)$

$i = f-g$ est définie sur D par $i(x) = (f-g)(x) = f(x)-g(x)$

$j = f\,g$ est définie sur D par $j(x) = (f\,g)(x) = f(x)\times g(x)$

$k = af$ est définie sur D par $k(x) = (af)(x) = a\times f(x)$

En particulier, pour $a=-1$, $l = -f$ est définie sur D par $l(x) = (-f)(x) = -f(x)$

$m = |f|$ est définie sur D par $m(x) = |f|(x) = |f(x)|$

Si, de plus, pour tout $x\in D$, on a $f(x) \geq 0$, alors:

$p = \sqrt{f}$ est définie sur D par $p(x) = (\sqrt{f})(x) = \sqrt{f(x)}$

$q = f^{\,n}$ est définie sur D par $q(x) = (f^{\,n})(x) = [f(x)]^{\,n}$

Si, de plus, pour tout $x\in D$, on a $g(x) \neq 0$, alors:

$r = \dfrac{f}{g}$ est définie sur D par $r(x) = \left[\dfrac{f}{g}\right](x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

En particulier: $s = \dfrac{1}{g}$ est définie sur D par $s(x) = \left[\dfrac{1}{g}\right](x) = \dfrac{1}{g(x)}$.

• **Ces définitions font partie du cours de $1^{ère}$** , donc à apprendre!

Soit la fonction t définie sur D par $t(x) = f(x) + a$.
Dans ce problème, on suppose que D est un intervalle de $\mathbb{R}$.

1) Démontrer que, si f est strictement croissante sur D, alors t est strictement croissante sur D.
2) Démontrer que, si f est strictement croissante sur D, alors l est strictement décroissante sur D.
3) Si f est strictement croissante sur D, étudier le sens de variation de k sur D.
4) Démontrer que, si f et g sont strictement croissantes sur D, alors h est strictement croissante sur D.
5) Étudier le sens de variation de la fonction i sur D, selon celui des fonctions f et g sur D.

Énoncez les théorèmes que vous aurez démontré.

6) Démontrer que, si f et g sont deux fonctions strictement croissantes sur D, et si, pour tout $x\in D$, on a $f(x)>0$ et $g(x)>0$, alors la fonction j est strictement croissante sur D.

Montrer à l'aide d'un exemple que les conditions: $f(x)>0$ et $g(x)>0$ pour tout $x\in D$, sont nécessaires pour conclure.

7) Démontrer que, si g a un signe constant sur D, la fonction s varie en sens contraire de g.
8) Si f est strictement croissante sur D, montrer que m peut être, selon des conditions à déterminer:

a) strictement croissante sur D.
b) strictement décroissante sur D.
a) non monotone sur D.