$1^{ère}$ST Devoir à la maison n°13

Pour Mercredi 19 Mars 1997

Configuration du problème:

Soit un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $(\mathcal{C})$ le cercle trigonométrique associé à ce repère.

Placer les points A, B, C et D tels que: $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = -\vec{i}$ et $\overrightarrow{OC} = -\sqrt{3}\,\vec{j}$: ABC est donc équilatéral.

Pour tout entier $n \geq 3$, on définit le point I_n par: $\overrightarrow{AI_n} = \frac{2}{n}\overrightarrow{AB}$.

La droite (CI_n) coupe le cercle $(\mathcal{C})$ en deux points; celui qui n'appartient pas au segment $[CI_n]$ est appelé E_n.

Vocabulaire:

Pour n entier supérieur à 2, un polygone régulier convexe à n côtés inscrit dans le cercle $(\mathcal{C})$ est défini par une suite de n points consécutifs A_1, A_2, A_3, ······· , A_n situés sur le cercle $(\mathcal{C})$ et vérifiant:

$$A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \cdots = A_{n-1}A_n = A_nA_1 = L_n$$

et: $(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}) = (\overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3}) = \cdots = (\overrightarrow{OA_{n-1}}, \overrightarrow{OA_n}) = (\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{OA_1}) = \frac{2\pi}{n}$

Un tel polygone sera noté (P_n) dans ce problème.

Problématique:

Certains prétendent que, pour tout entier $n \geq 3$, $AE_n = L_n$.

Le but du problème est de voir si cette affirmation est vraie!

Étude du problème:

I) Réaliser la construction de E_3, E_4, E_5 et E_6 .

II)

1) Déterminer une équation de la droite (CI_n).

2) En utilisant l'équation du cercle $(\mathcal{C})$, montrer que l'abscisse de E_n est solution de l'équation du second degré en x : $2(n^2 - 2n + 4)x^2 - 3n(n-4)x + (n-4)^2 = 0$.

3) Résoudre cette équation dans les cas particuliers où n = 3 , puis n = 4 .

En déduire les coordonnées de E_3 et de E_4 .

4) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 5$, les coordonnées de E_n (x_n ; y_n) sont:

$$x_n = \frac{(n-4)\left(3n + \sqrt{n^2 + 16n - 32}\right)}{4(n^2 - 2n + 4)} \quad \text{et} \quad y_n = \frac{\left(n\sqrt{n^2 + 16n - 32} - (n-4)^2\right)\sqrt{3}}{4(n^2 - 2n + 4)} .$$

5) Utiliser ces formules pour calculer les coordonnées de E_5 et E_6 .

III) Soit $\alpha_n = (\vec{i}; \overrightarrow{OE_n})$

1) Exprimer x_n et y_n en fonction de α_n .

En déduire la mesure principale, en radians, des angles α_3, α_4 et α_5 .

Conclure que:

$[AE_3]$ est le côté d'un triangle équilatéral inscrit dans $(\mathcal{C})$.

$[AE_4]$ est le côté d'un carré inscrit dans $(\mathcal{C})$.

$[AE_6]$ est le côté d'un hexagone régulier inscrit dans $(\mathcal{C})$.

2) Montrer que la longueur des côtés de (P_n) est: $L_n = 2\sin\frac{\pi}{n}$.

3) Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, on a: $AE_n = \sqrt{2(1 - x_n)}$.

4) En utilisant votre calculatrice programmable, évaluer L_n et AE_n pour les entiers n tels que:

$3 \leq n \leq 12$, n = 50 , n = 100 , n= 200 , n= 500 et n = 1000.

5) Vérifier que pour n = 3, n = 4 et n = 6 , on retrouve bien les résultats du 1).

Que penser de la comparaison de L_n avec AE_n pour les autres valeurs de n?

Conclure !