$1^{ère}$ST *Devoir à la maison n°15*

Pour Lundi 21 Avril 1997

Activités préparatoires aux différents types de limites de fonctions

I) *Limite infinie en $+\infty$:*

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 1 et AC = x où $x \in \left]0;+\infty\right[$

Soit f la fonction définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par f(x) = BC.

1) Donner la formule de calcul de f(x).
2) Trouver $a \in \left]0;+\infty\right[$ tel que, si x > a , alors, f(x) > 1000.
3) Compléter la phrase : « Pour avoir $f(x) > 10^6$, il suffit que x soit plus grand que .... » .
4) Vérifier que, pour tout x > 0 , on a : BC > x .
5) L étant une distance quelconque, compléter la phrase :
   « Quel que soit x > .... , on a : BC > L » .

II) *Limite finie en $+\infty$:*

On reprend les données du 1^er^ exercice où vous avez dû remarquer que, pour x assez grand, on a: BC ≈ AC.

Afin de préciser cela, étudions la fonction g telle que: $g(x) = \dfrac{BC}{AC}$.

1) Expliquer pourquoi : AC < BC < AB + AC .
2) En déduire que : $0 < g(x) - 1 < \dfrac{1}{x}$.
3) Trouver $a \in \left]0;+\infty\right[$ tel que, pour tout x > a , on ait : $0 < g(x) - 1 < 10^{-20}$.
4) b étant un réel strictement positif quelconque, compléter la phrase :
   « Pour avoir $0 < g(x) - 1 < b$, il suffit que x soit plus grand que .... » .

III) *Limite infinie en un point :*

Dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on prend A(1;1) B(x;0) . Pour tout $x \in \left]1;+\infty\right[$, on construit C(0;y) tel que A , B et C soient alignés. On définit ainsi une fonction h par h(x) = y .

1) Déterminer la formule de calcul de y = h(x).
2) La fonction h n'étant pas définie en x = 1, on se propose de démontrer que h(x) peut devenir aussi grand que l'on veut, à condition que x soit assez près de 1.

   a) Trouver $a \in \left]0;+\infty\right[$ tel que, si 1 < x < 1+ a , c'est à dire si 0 < x–1 < a , alors, h(x) > 1000.

   b) b étant un réel quelconque strictement supérieur à 1, compléter la phrase :
   « Pour avoir h(x) > b , il suffit que x soit situé à une distance de 1 inférieure à .... » .

IV) *Limite finie en un point :*

Dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on construit la courbe (C) représentative de la fonction définie sur [0;2] par : $x \mapsto x^2$. (D) est la droite d'équation x = 2 et A(1;1) .

Pour $x \in \left[0;1\right[\cup \left]1;2\right]$, on appelle M le point de (C) d'abscisse x .

La droite (AM) coupe (D) en M' . L'ordonnée y de M' définit la fonction k par : k(x) = y .

1) Déterminer la formule de calcul de y = k(x).
2) La fonction k n'étant pas définie pour x = 1, on se propose de démontrer que k(x) peut être aussi proche de 3 que l'on veut, pourvu que x soit assez proche de 1.

   a) Trouver $a \in \left]0;+\infty\right[$ tel que, si $0 < |x-1| < a$, alors on a: $|k(x)-3| < 10^{-5}$.

   b) b étant un réel quelconque strictement positif, compléter la phrase :
   « Pour avoir k(x) situé à une distance du nombre 3 inférieure à b , il suffit que x soit situé à une distance de 1 inférieure à .... » .