

### 1<sup>ère</sup>S3 Devoir à la maison n°1

Pour Lundi 19 Septembre 2005.

On cherche à calculer le nombre  $A(x ; y) = 25x^4 - y^4 + 2y^2$   
pour  $x = 2\,403\,763\,488$  et  $y = 5\,374\,978\,561$ .

1) A l'aide de votre calculatrice et d'autres calculatrices (de modèles différents) de votre entourage, calculer  $A(2\,403\,763\,488 ; 5\,374\,978\,561)$ .

Réaliser un tableau comparatif des résultats obtenus. Qu'en pensez-vous?

2) Afin de résoudre de façon exacte ce problème, on va utiliser l'égalité (E) :  $y^2 = 5x^2 + 1$ .

a) Montrer que, si un couple  $(x ; y)$  vérifie l'égalité (E), alors:  $A(x ; y) = 1$ .

b) La propriété réciproque est-elle vraie ?

c) Trouver deux entiers naturels simples vérifiant l'égalité (E).

d) Démontrer que si l'égalité (E) est vraie pour un couple  $(x ; y)$  quelconque, alors elle est encore vraie pour le couple  $(X ; Y) = (2xy ; 5x^2 + y^2)$ .

e) A l'aide des résultats des questions c) et d), déterminer des couples  $(x ; y)$  d'entiers naturels de plus en plus grands vérifiant l'égalité (E).

Constater que le couple  $(2\,403\,763\,488 ; 5\,374\,978\,561)$  est ainsi obtenu.

f) Conclure!