

# 1<sup>ère</sup> ST Devoir à la maison n°18

Pour Mercredi 4 Juin 1997

Dans le plan orienté, ABC est un triangle de sens direct. On note:  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ ,  
 $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \hat{A}$ ,  $(\vec{BC}, \vec{BA}) = \hat{B}$ ,  $(\vec{CA}, \vec{CB}) = \hat{C}$  et S l'aire du triangle ABC.

## I) Généralisation du théorème de Pythagore: Théorème de Al-Kashi.

1) Développer le carré scalaire du vecteur:  $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$ . En exprimant  $\vec{AC} \cdot \vec{AB}$  à l'aide de  $\cos(\vec{AC}, \vec{AB})$ , en déduire que:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$ .

2) Que devient cette égalité lorsque le triangle est rectangle en A?

3) Donner une expression de  $\cos \hat{A}$  en fonction des distances a, b et c.

## II) Propriétés liées aux sinus des angles du triangle.

1) On appelle H le projeté orthogonal de C sur (AB). En étudiant les deux cas de figure:  $\hat{A}$  aigu, puis  $\hat{A}$  obtus, montrer que l'on a:  $S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$ .

2) En écrivant les deux égalités analogues avec les angles  $\hat{B}$  et  $\hat{C}$ , montrer que l'on a:

$$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c} = \frac{2S}{abc}.$$

Comment traduire par une phrase simple les deux premières égalités?.