$1^{ère}$ S_2 Devoir à la maison n°8

Pour le 4 Janvier 1996

Ecercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x)=(1+x)^3$.

1) Dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unités:1cm), on nomme (C) la courbe représentative de la fonction f. Tracer la partie de (C) dont les abscisses appartiennent à l'intervalle $[-3;1]$.

2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer la fonction dérivée $f\ '$ de f.

3) $A(0;1)$ est un point de (C). Expliquer pourquoi (C) possède une tangente (T) en A.

Montrer que (T) est la représentation graphique de la fonction affine g définie par $g(x)=3x+1$.

4) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose : $d(x)=f(x)-g(x)$. Calculer $d(x)$.

Soit $M\in(T)$ et $N\in(C)$ deux points de même abscisse $x\in\mathbb{R}$.

a) Montrer que : $\overrightarrow{MN}=d(x)\cdot\vec{j}$ et donc que: $\overline{MN}=d(x)$.

b) En déduire que la position relative de (C) et (T) dépend du signe de $d(x)$.

c) Conclure la position relative de (C) et (T) selon la valeur de x.

5) Démontrer que, si $x\in[-3;1]$, alors on a: $0\leqslant d(x)\leqslant 4x^2$.

6) Déduire de la question précédente que, pour $x\in[-3;1]$:

$3x+1$ est une approximation de $(1+x)^3$ à $4x^2$ près par défaut.

7) Utiliser la question précédente pour encadrer le volume V d'un cube de 0,99cm d'arête.

Quelle est l'amplitude de l'encadrement?

Déduire du résultat ci-dessus, l'approximation: $V\approx 9702\,cm^3$ à 2×10^{-6} près.

Exercice 2

Soit $g:x\to\sqrt{x}$ et (P) sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$. (Unités: 2cm)

Soit $f:x\to\sqrt{1+x}$ et (C) sa représentation graphique dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Rappeler le tableau des variations de g et construire (P) .

2) Quel est l'ensemble de définition de f ?

Par quelle transformation, l'image de la courbe (P) est-elle la courbe (C)? Justifier votre réponse. Tracer (C).

3) Soit $A(0;1)$

Montrer que la tangente (T) à la courbe (C) en A est la représentation de la fonction affine: $t:x\to\frac{1}{2}x+1$.

4) Soit $d(x)=f(x)-t(x)$

a) Montrer que pour tout $x\in\,]-1;+\infty[$,on a: $d(x)=\dfrac{-\frac{1}{4}x^2}{f(x)+t(x)}$.

b) En utilisant un raisonnement analogue à celui de l'exercice 1, montrer que la courbe (C) est toujours situé au-dessous de la droite (T), sauf pour le point A où (T) est tangente $\grave{a}\,(C)$.

5)

a) Montrer que si $|x|\leqslant\frac{1}{4}$ alors : $|d(x)|\leqslant\dfrac{x^2}{3{,}5+2\sqrt{3}}$.

b) En déduire que, pour tout $x\in\left[-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right]$, $t(x)$ est une approximation de $f(x)$ à $0{,}15\,x^2$ près par excès.

c) En utilisant le résultat précédent, montrer que 0,9 est une approximation de $\sqrt{0{,}8}$ à 6×10^{-3} près par excès.

d) Montrer que si $|x|\leqslant\frac{(2+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}\acute{}\,10^{-n}$ (où n est un entier naturel supérieur à 1),

alors, $t(x)$ est une approximation de $f(x)$ à 10^{-2n} près par excès.

e) Vérifier alors que le calcul précédent permet d'affirmer que :

$\sqrt{1{,}00002}\approx1{,}00001$ à 10^{-10} près par excès.