$1^{ère}S_1$ Devoir à la maison n°4

Pour Mardi 3 Novembre 1998.

Exercice 1 :

ABC est un triangle.

1) Dire pourquoi $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base de l'ensemble des vecteurs du plan.

2) P étant un point quelconque du plan, montrer qu'il existe un couple unique (x;y) de réels tels que:

$$\overrightarrow{AP} = x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC}.$$

3) En déduire que P est le barycentre de $(A;\alpha)$ $(B;\beta)$ $(C;\gamma)$ où α, β et γ sont trois réels à exprimer en fonction de x et de y.

4) Appliquer ce résultat général au cas où ABPC est un parallélogramme.

Exercice 2 :

ABC est un triangle. On note AB = c , AC = b et BC = a.

1) La bissectrice de l'angle $B\hat{A}C$ coupe [BC] en I. La parallèle à (AI) passant par C coupe (AB) en P.

a) Prouver que le triangle ABP est isocèle en A.

b) En déduire que: $b \cdot \overrightarrow{BA} = c \cdot \overrightarrow{AP}$.

2) En déduire que I est le barycentre de (B;b) (C;c).

3) La bissectrice de l'angle $A\hat{B}C$ coupe [AC] en J. La bissectrice de l'angle $B\hat{C}A$ coupe [AB] en K. On démontrerai de même que J est le barycentre de (A;a) (C;c) et que K est le barycentre de (A;a) (B;b), mais cette preuve n'est pas demandée.

On nomme L, le barycentre de (A;a) (B;b) (C;c) .

Prouver que L est le point d'intersection des trois bissectrices des angles du triangle ABC.

4) Étudier le cas particulier où L est l'isobarycentre de A, B et C.