Équations cartésiennes dans le plan et dans l'espace

Définitions

- Dans le plan muni d'un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, on appelle équation cartésienne d'une courbe $\mathscr{C}$, une égalité de la forme $f(x,y)=0$ donnant une condition nécessaire et suffisante pour que le point de coordonnées cartésiennes $(x\,;y)$ appartienne à $\mathscr{C}$.
- Dans l'espace muni d'un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$, on appelle équation cartésienne d'une surface $\mathscr{S}$, une égalité de la forme $f(x,y,z)=0$ donnant une condition nécessaire et suffisante pour que le point de coordonnées cartésiennes $(x\,;y\,;z)$ appartienne à $\mathscr{S}$.

Équation cartésienne d'une droite dans le plan

Le plan est muni d'un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

Théorème 1

Toute droite $\mathscr{D}$ possède une équation cartésienne de la forme $\boxed{ax+by+c=0}$ où les réel a et b ne sont pas tous les deux nuls.

Cette droite passe par le point $A(x_A\,;y_A)$ tel que: $ax_A+by_A+c=0$ et a pour vecteur directeur $\vec{V}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

Toute équation du type $kax+kby+kc=0$ (où $k\neq 0$) est aussi une équation cartésienne de $\mathscr{D}$.

Lorsque $\mathscr{D}$ n'est pas parallèle à l'axe $(O\,;\vec{j})$, son équation peut s'écrire sous la forme: $y=mx+p$. C'est alors la représentation graphique d'une fonction affine.

Lorsque $\mathscr{D}$ est parallèle à l'axe $(O\,;\vec{j})$, son équation peut s'écrire sous la forme: $x=q$.

Vecteur normal à une droite: vecteur non nul orthogonal aux vecteurs directeurs de cette droite.

Théorème 2

Dans un repère **orthonormal** $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, une droite $\mathscr{D}$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ a une équation cartésienne de la forme: $ax+by+c=0$.

Réciproquement, la droite d'équation $ax+by+c=0$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

Équation cartésienne d'un cercle dans le plan

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

Cercle défini par son centre et son rayon.

Le cercle de centre $A(a\,;b)$ et de rayon r a pour équation cartésienne: $\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}$.

Cercle défini par son diamètre.

Un point M appartient au cercle de diamètre *[AB]* si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$.

Si $A(x_a\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$,

Alors le cercle de diamètre *[AB]* a pour équation cartésienne: $\boxed{(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0}$

Forme générale d'une équation cartésienne de cercle.

En développant les expressions précédentes, on voit que:

Une équation cartésienne de cercle peut s'écrire sous la la forme: $\boxed{x^2+y^2+mx+py+q=0}$.

Montrons à l'aide d'exemples que la réciproque n'est pas forcément vraie:

Exemple 1: L'équation $x^2+y^2-2x+6y+6=0$ peut s'écrire: $x^2-2x+1+y^2+6y+9+6-1-9=0$

On obtient alors: $(x-1)^2+(y+3)^2=4=2^2$

Ceci est l'équation du cercle de centre $A(1\,;-3)$ et de rayon 2.

Exemple 2: L'équation $x^2+y^2+4x-8y+20=0$ va s'écrire: $x^2+4x+4+y^2-8y+16+20-4-16=0$
Ceci donne: $(x+2)^2+(y-4)^2=0$
Cette égalité est seulement vraie pour les coordonnées du point $A(-2\,;4)$
L'égalité ci-dessus n'est donc pas une équation de cercle (ou, à la rigueur, un cercle de centre *A* et de rayon 0).

Exemple 3: L'équation $x^2+y^2+6x-2y+15=0$ s'écrit: $x^2+6x+9+y^2-2y+1+15-9-1=0$
C'est à dire: $(x+3)^2+(y-1)^2=-5$.
Une somme de deux carrés ne peut pas être négative. L'égalité précédente n'est réalisée pour aucun point du plan. On a donc ici une équation de l'ensemble vide !.. Ce n'est donc pas une équation de cercle.

Équations cartésiennes des plans parallèles aux plans du repère dans l'espace:

L'espace est muni d'un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

Un plan parallèle à $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ a une équation cartésienne de la forme: $\boxed{z=a}$.
Le réel *a* est la cote du point d'intersection du plan avec l'axe $(O\,;\vec{k})$.

Un plan parallèle à $(O\,;\vec{i}\,;\vec{k})$ a une équation cartésienne de la forme: $\boxed{y=b}$.
Le réel *b* est l'ordonnée du point d'intersection du plan avec l'axe $(O\,;\vec{j})$.

Un plan parallèle à $(O\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ a une équation cartésienne de la forme: $\boxed{x=c}$.
Le réel *c* est l'abscisse du point d'intersection du plan avec l'axe $(O\,;\vec{i})$.

Équation cartésienne d'une sphère de centre *O* et de rayon *r*:

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

La sphère de centre O et de rayon r a pour équation: $\boxed{x^2+y^2+z^2=r^2}$

Remarque: Les sections de la sphère de centre O et de rayon r par les plans de coordonnées sont des cercles de centre O et de rayon r. Par exemple, la section avec le plan $(O\,;\vec{i}\,;\vec{k})$ est le cercle d'équation $x^2+z^2=r^2$ dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{k})$ de ce plan.

Équation cartésienne d'un cylindre de révolution ayant pour axe une droite du repère:

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

Équation cartésienne d'un cylindre de révolution ayant l'axe $(O\,;\vec{k})$ comme axe de révolution: $\boxed{x^2+y^2=r^2}$
Le réel positif *r* étant le rayon du cercle d'intersection du cylindre avec le plan $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

Équation cartésienne d'un cylindre de révolution ayant l'axe $(O\,;\vec{j})$ comme axe de révolution: $\boxed{x^2+z^2=r^2}$
Le réel positif *r* étant le rayon du cercle d'intersection du cylindre avec le plan $(O\,;\vec{i}\,;\vec{k})$.

Équation cartésienne d'un cylindre de révolution ayant l'axe $(O\,;\vec{i})$ comme axe de révolution: $\boxed{y^2+z^2=r^2}$
Le réel positif *r* étant le rayon du cercle d'intersection du cylindre avec le plan $(O\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

Équation cartésienne d'un cône de révolution ayant pour axe une droite du repère:

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

Équation cartésienne d'un cône de révolution de sommet *O* ayant l'axe $(O\,;\vec{k})$ comme axe de révolution:
Pour tout point $M\neq O$, l'angle $(\vec{k}\,;\overrightarrow{OM})=\alpha$ est constant: c'est le demi-angle au sommet de ce cône.
Ce cône a pour équation cartésienne: $\boxed{x^2+y^2-(\tan\alpha)^2\,z^2=0}$

Équation cartésienne d'un cône de révolution de sommet *O* ayant l'axe $(O\,;\vec{j})$ comme axe de révolution:
Pour tout point $M\neq O$, l'angle $(\vec{j}\,;\overrightarrow{OM})=\alpha$ est constant: c'est le demi-angle au sommet de ce cône.
Ce cône a pour équation cartésienne: $\boxed{x^2+z^2-(\tan\alpha)^2\,y^2=0}$

Équation cartésienne d'un cône de révolution de sommet *O* ayant l'axe $(O\,;\vec{i})$ comme axe de révolution:
Pour tout point $M\neq O$, l'angle $(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM})=\alpha$ est constant: c'est le demi-angle au sommet de ce cône.
Ce cône a pour équation cartésienne: $\boxed{y^2+z^2-(\tan\alpha)^2\,x^2=0}$