

Rappels et compléments sur les fonctions

Ceci complète le cours du livre : chapitre 1 (pages 8 à 29) et les connaissances du cours de seconde.

Définition d'une fonction numérique de la variable réelle

Définir une fonction f sur l'ensemble $D_f \subset \mathbb{R}$, c'est donner un procédé, qui à chaque nombre $x \in D_f$, fait correspondre un nombre unique de \mathbb{R} , noté $f(x)$.

Une fonction $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto y = f(x)$

est déterminée par :

- La variable x et son image $f(x)$.
- La correspondance reliant x à $f(x)$. Pour les fonctions numériques de la variable réelle, il s'agit le plus souvent d'une formule de calcul.
- L'ensemble de définition de f : C'est la partie D_f de \mathbb{R} qui contient tous les réels x pour lesquels $f(x)$ a une signification.

Représentation graphique d'une fonction dans un repère

Si $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto y = f(x)$

La représentation graphique de f dans le repère est l'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ où $x \in D_f$ et $y = f(x)$.

Reconnaître si une courbe représente une fonction : Une courbe représente une fonction lorsque tous les points de la courbe ont des abscisses différentes.

- Une droite non parallèle à l'axe des ordonnées a une équation que peut se mettre sous la forme $y = mx + p$, est la représentation graphique de la fonction affine $f: x \mapsto y = ax + b$.
- Une droite parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $x = q$, n'est pas une représentation graphique de fonction.
- Les cercles ne sont pas non plus des représentations graphiques de fonctions.

Équation d'une courbe dans un repère:

De façon générale, l'équation d'une courbe Γ dans un repère est une égalité que vérifient les coordonnées $(x; y)$ de tous les points de la courbe Γ .

En particulier :

- Lorsqu'une courbe est la représentation graphique d'une fonction, on exprime l'équation de la courbe sous la forme $y = f(x)$, où, pour tout $x \in D_f$, correspond une seule image $f(x)$.

De plus, nous étudierons cette année les deux cas particuliers suivants :

- Équation d'une droite: $ax + by + c = 0$.
- Équation d'un cercle: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Ceci sera prouvé plus tard

Image et antécédents : Lecture graphique

Si f est une fonction définie sur D_f , l'image $f(x)$ du réel $x \in D_f$ par la fonction f , est l'ordonnée du point M d'abscisse x de la courbe représentative C_f de f .

Réciproquement, un antécédent (s'il existe) de $a \in \mathbb{R}$ par la fonction f , est l'abscisse de l'un des points de la courbe C_f dont l'ordonnée est a .

Les solutions de l'équation $f(x) = a$ sont les antécédents du nombre $a \in \mathbb{R}$ par la fonction f .

De même, les solutions de l'inéquation $f(x) \leq a$ sont les antécédents par la fonction f des nombres inférieurs ou égaux à a . Ce sont les abscisses des points de C_f dont les ordonnées sont inférieures ou égales au nombre a .

Égalité de deux fonctions

Si f et g sont deux fonctions définies sur le même ensemble de définition D , on écrit:

$f = g$ pour signifier que, pour tout $x \in D$, on a: $f(x) = g(x)$

Par exemple :

Si $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ et si $g :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto y = \frac{1}{x}$ $x \mapsto y = \frac{1}{x}$

On a: $f \neq g$ car ces deux fonctions n'ont pas le même ensemble de définition.

Cependant, pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a: $f(x) = g(x)$.

On dit alors que g est la restriction de f à l'intervalle $]0; +\infty[$.

Comparaison de fonctions

Si f et g sont deux fonctions définies sur le même ensemble de définition D , on écrit:

$f \leq g$ pour signifier que, pour tout $x \in D$, on a: $f(x) \leq g(x)$

Par exemple :

Pour $x \in]1; +\infty[$, on définit: $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$ On peut donc écrire sur $]1; +\infty[$: $f \leq g$.

Sens de variation d'une fonction

Il est nécessaire que la fonction f soit définie sur un intervalle I de \mathbb{R} (qui peut bien sûr être \mathbb{R} en entier).

- f est croissante sur I signifie:

Pour tout $a \in I$ et $b \in I$ tels que $a \leq b$, alors on a: $f(a) \leq f(b)$

C'est à dire que les images de deux réels quelconques de I sont rangées dans le même ordre que ces deux réels.

- f est strictement croissante sur I signifie:

Pour tout $a \in I$ et $b \in I$ tels que $a < b$, alors on a: $f(a) < f(b)$

- f est décroissante sur I signifie:

Pour tout $a \in I$ et $b \in I$ tels que $a \leq b$, alors on a: $f(a) \geq f(b)$

C'est à dire que les images de deux réels quelconques de I sont rangées dans l'ordre inverse de ces deux réels.

- f est strictement décroissante sur I signifie:

Pour tout $a \in I$ et $b \in I$ tels que $a < b$, alors on a: $f(a) > f(b)$

- f est constante sur I signifie:

Pour tout $a \in I$ et $b \in I$, on a: $f(a) = f(b)$

- Une fonction est monotone sur un intervalle I , lorsqu'elle est croissante sur I ou bien décroissante sur I .

Par exemple, la fonction carré n'est pas monotone sur \mathbb{R} car elle est croissante sur $]0; +\infty[$, mais elle est décroissante sur $] -\infty; 0]$. Elle est donc monotone sur $]0; +\infty[$ et sur $] -\infty; 0]$, mais pas sur la réunion de ces deux intervalles.

Étudier les variations d'une fonction, c'est déterminer les intervalles de monotonie, c'est à dire les intervalles sur lesquels la fonction est monotone. Les conclusions de cette enquête sont résumées dans le tableau des variations de la fonction.

Maximum - Minimum

Si f est une fonction définie sur un intervalle I :

- S'il existe $a \in I$ tel que, pour tout $x \in I$, on ait: $f(x) \leq f(a)$, on dit que $f(a)$ est le maximum de f sur I ou que f admet un maximum sur I en $x = a$.

- S'il existe $a \in I$ tel que, pour tout $x \in I$, on ait: $f(x) \geq f(a)$, on dit que $f(a)$ est le minimum de f sur I ou que f admet un minimum sur I en $x = a$.

Maximum local- Minimum local

Si f est une fonction définie sur un intervalle I :

• S'il existe un intervalle J de centre a tel que, pour tout $x \in J \cap I$, on ait: $f(x) \leq f(a)$, on dit que $f(a)$ est un maximum local (ou relatif) de f sur I , ou que f admet un maximum local (ou relatif) sur I en $x = a$.

• S'il existe un intervalle J de centre a tel que, pour tout $x \in J \cap I$, on ait: $f(x) \geq f(a)$, on dit que $f(a)$ est un minimum local (ou relatif) de f sur I , ou que f admet un minimum local (ou relatif) sur I en $x = a$.

Fonction majorée, minorée, bornée.

Si f est une fonction définie sur un intervalle I .

• S'il existe un réel M tel que, pour tout $x \in I$, on ait: $f(x) \leq M$, on dit que f est majorée sur I .

Le nombre M est appelé un majorant de f sur I .

• S'il existe un réel m tel que, pour tout $x \in I$, on ait: $f(x) \geq m$, on dit que f est minorée sur I .

Le nombre m est appelé un minorant de f sur I .

• Si f est à la fois majorée et minorée sur I , on dit que f est bornée sur I .

Dans ce cas, il existe deux réels M et m tels que, pour tout $x \in I$, on ait: $m \leq f(x) \leq M$

Par exemple, la fonction $f : x \mapsto \sin x$ est bornée sur \mathbb{R} .

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a: $-1 \leq \sin x \leq 1$, c'est à dire que f est minorée par -1 et majorée par 1 . A noter que l'encadrement précédent peut aussi s'écrire: $|\sin x| \leq 1$.

Fonctions paires - Fonctions impaires - Fonctions périodiques.

• f est paire lorsque, pour tout $x \in D_f$, on a: $(-x) \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$

Le graphique d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Par exemple: $x \mapsto x^2$ est une fonction paire définie sur \mathbb{R} .

• f est impaire lorsque, pour tout $x \in D_f$, on a: $(-x) \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$

Le graphique d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Par exemple: $x \mapsto \frac{1}{x}$ est une fonction impaire définie sur \mathbb{R}^* .

Remarque: Cela nécessite que D_f soit symétrique par rapport à 0.

Par exemple: $x \mapsto \sqrt{x}$ qui est définie sur \mathbb{R}^+ n'est ni paire ni impaire.

• f est périodique de période $T \in \mathbb{R}^*$ lorsque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a: $f(x + T) = f(x)$

Pratiquement, étant donné que T n'est pas unique, on choisit le plus petit nombre T strictement positif vérifiant cela. Par exemple, la fonction $x \mapsto \sin x$ est périodique de période 2π .

Le graphique d'une fonction périodique de période T est invariant par la translation de vecteur $T \cdot \vec{i}$

Fonctions usuelles de référence

• Fonctions affines

• Une fonction affine est du type:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y = f(x) = mx + p \quad \text{où } m \text{ et } p \text{ sont des réels donnés}$$

Elle est représentée graphiquement par la droite D d'équation: $y = mx + p$.

La droite D a pour vecteur directeur $\vec{V} = \vec{i} + m\vec{j}$ et pour coefficient directeur le nombre $m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

où x_1 et x_2 sont des réels quelconques.

• Cas particuliers de fonctions affines:

• Si $p = 0$, $x \mapsto f(x) = mx$ est une fonction linéaire.

Dans ce cas, $f(x)$ est proportionnel x (m est le coefficient de proportionnalité).

Les graphiques des fonctions linéaires sont des droites qui passent par l'origine du repère.

• Si $m = 0$, $x \mapsto f(x) = p$ est une fonction constante.

Les graphiques des fonctions constantes sont des droites parallèles à l'axe des abscisses.

• Vocabulaire et propriétés :

Le nombre m est le *coefficient directeur* de la droite D représentative de f .

- Lorsque $m > 0$, la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} .
- Lorsque $m < 0$, la fonction f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .
- Lorsque $m = 0$, la fonction f est constante sur \mathbb{R} .

Lorsque le repère est orthonormé, le nombre m s'appelle aussi la *pente* de la droite.

Le nombre p est l'*ordonnée à l'origine* de la droite D : c'est l'ordonnée du point d'intersection de D avec l'axe des ordonnées.

Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur, c'est à dire des vecteurs directeurs colinéaires.

- La fonction valeur absolue: $x \mapsto |x|$ définie sur \mathbb{R} , à valeurs positives ou nulles, représentée graphiquement par les deux demi-droites d'équations: $y = x$ pour $x \geq 0$
 $y = -x$ pour $x \leq 0$.

C'est une fonction paire. Elle a pour minimum : $|0| = 0$.

Elle est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty [$.

- La fonction carré: $x \mapsto x^2$ définie sur \mathbb{R} , à valeurs positives ou nulles, représentée graphiquement par la parabole d'équation: $y = x^2$.

C'est une fonction paire. Elle a pour minimum : $0^2 = 0$

Elle est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty [$.

- La fonction cube: $x \mapsto x^3$ définie sur \mathbb{R} , à valeurs réelles, représentée graphiquement par la cubique d'équation: $y = x^3$.

C'est une fonction impaire. Elle est strictement croissante sur \mathbb{R} .

- La fonction racine carré: $x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur \mathbb{R}^+ , à valeurs positives ou nulles, représentée graphiquement par la demi-parabole d'équation: $y = \sqrt{x}$.

Elle a pour minimum : $\sqrt{0} = 0$. Elle est strictement croissante sur $[0 ; +\infty [$.

- La fonction inverse: $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur \mathbb{R}^* , à valeurs non nulles, représentée graphiquement par l'hyperbole d'équation: $y = \frac{1}{x}$.

C'est une fonction impaire.

Elle est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0 [$ et strictement décroissante sur $] 0 ; +\infty [$.

- La fonctions sinus: $x \mapsto \sin(x)$ définie sur \mathbb{R} , à valeurs dans $[-1 ; 1]$, représentée graphiquement par la sinusoïde d'équation $y = \sin x$.

C'est une fonction impaire et périodique de période 2π .

Elle est strictement croissante sur les intervalles $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right]$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Elle est strictement décroissante sur les intervalles $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right]$ où $k \in \mathbb{Z}$.

- La fonctions cosinus: $x \mapsto \cos(x)$ définie sur \mathbb{R} , à valeurs dans $[-1 ; 1]$, représentée graphiquement par la sinusoïde d'équation $y = \cos x$.

C'est une fonction paire et périodique de période 2π .

Elle est strictement décroissante sur les intervalles $[2k\pi ; \pi + 2k\pi]$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Elle est strictement croissante sur les intervalles $[-\pi + 2k\pi ; 2k\pi]$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Opération sur les fonctions

Il s'agit de procédés utilisés pour "combiner" les fonctions, afin de ramener leur étude à celles de fonctions plus simples dont on connaît déjà des propriétés (par exemple aux fonctions usuelles de référence).

Pour simplifier, nous supposons que les fonctions suivantes ont le même ensemble de définition D . Si cela n'est pas le cas, on peut toujours y parvenir en restreignant leur ensemble de définition à leur intersection, quitte à les renommer !

Si f et g sont définies sur D , si $k \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a:

$f + g$ est la fonction définie sur D par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$f - g$ est la fonction définie sur D par $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

$f g$ est la fonction définie sur D par $(f g)(x) = f(x) \times g(x)$

$k f$ est la fonction définie sur D par $(k f)(x) = k \times f(x)$

$|f|$ est la fonction définie sur D par $|f|(x) = |f(x)|$

Si, de plus, pour tout $x \in D$, on a $f(x) \geq 0$, alors:

\sqrt{f} est la fonction définie sur D par $(\sqrt{f})(x) = \sqrt{f(x)}$

f^n est la fonction définie sur D par $(f^n)(x) = [f(x)]^n$

Si, de plus, pour tout $x \in D$, on a $g(x) \neq 0$, alors:

$\frac{f}{g}$ est la fonction définie sur D par $\left[\frac{f}{g}\right](x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Si f est définie sur D_f et g est définie sur D_g et si, pour tout $x \in D_f$ on a $f(x) \in D_g$, alors:

$g \circ f$ est la fonction définie sur D_f par : $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$

Exemples:

Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = 2x + 1$$

et si $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto g(x) = x + 2$$

Pour tout réel x , on a:

$$(f + g)(x) = 3x + 3$$

$$(5f)(x) = 10x + 5$$

$$\text{Pour } x \geq -\frac{1}{2}, \text{ on a: } (\sqrt{f})(x) = \sqrt{2x+1}$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = (2x+1) + 2 = 3x+3$$

$$(f - g)(x) = x - 1$$

$$|f|(x) = |2x+1|$$

$$\text{Pour } x \neq -2, \text{ on a: } \left[\frac{f}{g}\right](x) = \frac{2x+1}{x+2}$$

$$\text{et } (f \circ g)(x) = f[g(x)] = 2(x+2) + 1 = 2x+5$$

$$(fg)(x) = (2x+1)(x+2)$$

$$(f^3)(x) = (2x+1)^3$$

$$\text{Pour } x \neq -2, \text{ on a: } \left[\frac{f}{g}\right](x) = \frac{2x+1}{x+2}$$

Sens de variation de la composée de deux fonctions.

Si f est définie et monotone sur I et g est définie et monotone sur J et si, pour tout $x \in I$ on a : $f(x) \in J$, alors:

$g \circ f$ est définie et monotone sur I .

Plus précisément,

• Si f et g ont le même sens de variation (toutes les deux croissantes, ou bien toutes les deux décroissantes), alors $g \circ f$ est croissante sur I .

• si f et g ont des sens de variation différents (l'une croissante, l'autre décroissante), $g \circ f$ alors est décroissante sur I .

Exemple:

$f: x \mapsto x - 1$ est strictement croissante sur \mathbb{R} .

$g: x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ et strictement décroissante sur \mathbb{R}^- .

Donc :

$g \circ f: x \mapsto (x-1)^2$ est strictement croissante sur $[1; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty; 1]$, car pour $x \in [1; +\infty[$, on a $f(x) = x-1 \geq 0$ et pour $x \in]-\infty; 1]$, on a $f(x) = x-1 \leq 0$.