Comportement asymptotique

NB: Les phrases écrites entre guillemets en italique sont nécessaires à la compréhension de la notion de limite, mais sont peu utilisées dans la pratique où l'on fait plutôt appel aux propriétés des limites des fonctions usuelles ainsi qu'aux théorèmes concernant les limites et les opérations .

I) Limite en + ∞

Cela nécessite que la fonction soit définie sur un intervalle du type : [a ; + ∞ [.

1) Limite infinie en + ∞

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ signifie que :

« f(x) devient plus grand que n'importe quel nombre fixé à l'avance, à condition de choisir x suffisamment grand.. »
Ce que l'on peut aussi énoncer sous la forme :
« Pour tout réel b (aussi grand que l'on veut), l'intervalle [b ; +∞ [contient toutes les images f(x) lorsque x est suffisamment grand. »

Exemples : Les fonctions usuelles $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$ et toutes les fonctions puissances d'exposant entier strictement positif , ainsi que les fonctions $x \mapsto |x|$, $x \mapsto \sqrt{x}$ ont pour limite + ∞ lorsque x tend vers + ∞.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ signifie que: $\lim\limits_{x \to +\infty} [-f(x)] = +\infty$

Exemples : Les fonctions $x \mapsto -x$, $x \mapsto -x^2$, $x \mapsto -x^3$, $x \mapsto -|x|$, $x \mapsto -\sqrt{x}$ ont pour limite – ∞ lorsque x tend vers + ∞.

2) Limite finie en + ∞

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}$ signifie que :

« f(x) devient aussi proche que l'on veut du nombre ℓ , à une distance fixée à l'avance aussi petite que l'on veut, à condition de choisir x suffisamment grand . »
Ce que l'on peut aussi énoncer sous la forme :
« Tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les images f(x) lorsque x est suffisamment grand.. »

Exemples : Les fonctions suivantes ont pour limite 0 en $+\infty$: $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$.
Il en est de même pour toutes les fonctions inverses des fonctions puissances d'exposant entier strictement positif et pour les fonctions: $x \mapsto \dfrac{1}{|x|}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

NB : Les résultats concernant les limites des fonctions usuelles données dans les exemples ci-dessus sont à connaître par cœur.
Ceux pour lesquels la limite est 0 peuvent être utilisés pour une limite $\ell \in \mathbb{R}$ grâce au théorème (évident) énoncé page suivante :

• **Théorème :**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell \quad \text{équivaut à :} \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x)-\ell]=0$$

Qui peut aussi s'exprimer :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell \quad \text{équivaut à :} \quad f(x)=\ell+\varphi(x) \ \text{ où } \varphi \text{ est une fonction telle que : } \lim_{x\to+\infty} \varphi(x)=0$$

Exemple : $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$ car : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

Dans cet exemple : $f(x)=1+\frac{1}{x}$, $\varphi(x)=\frac{1}{x}$ et $\ell=1$.

3) Pas de limite en + ∞.

Une fonction n'a pas nécessairement de limite en + ∞ .

Exemple : $x \mapsto \sin x$ n'a pas de limite en + ∞ car :
La fonction sinus est bornée (majoré par 1 et minoré par –1) : elle ne peut avoir ni + ∞, ni –∞ comme limite en + ∞.
De plus, sur tout intervalle d'amplitude 2π, sin x prend toutes les valeurs réelles entre –1 et 1, donc, même pour x aussi grand que l'on veut, sin x ne peut de rapprocher d'aucune valeur finie à cause de son oscillation perpétuelle entre –1 et 1.

II) Limite en – ∞

Cela nécessite que la fonction soit définie sur un intervalle du type :] – ∞ ; a]
On peut énoncer des définitions analogues au **I)** , mais aussi s'y ramener, grâce à la propriété :

• $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} [f(-x)]$

Remarque : Si la fonction f est paire ou impaire, la conclusion est immédiate !

Exemples :

• Les fonctions usuelles $x \mapsto x$, $x \mapsto x^3$ et toutes les fonctions puissances d'exposant impair strictement positif , ont pour limite – ∞ lorsque x tend vers – ∞ .

• Les fonctions usuelles $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^4$ et toutes les fonctions puissances d'exposant pair strictement positif , ainsi que la fonction $x \mapsto |x|$ ont pour limite +∞ lorsque x tend vers – ∞.

• Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ et toutes les fonctions inverses des fonctions puissances d'exposant entier strictement positif, ainsi que la fonction $x \mapsto \frac{1}{|x|}$ ont pour limite 0 lorsque x tend vers – ∞ .

III) Asymptote horizontale

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, si (C) est la courbe d'équation y = f(x) , et (D) la droite d'équation $y = \ell$, la distance MN entre un point M de (C) et un point N de (D) de même abscisse x est : $MN = \left| f(x) - \ell \right|$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, alors cette distance MN a pour limite 0 en + ∞.

Vocabulaire :

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$, *la droite d'équation y = a est asymptote horizontale à(C)* en + ∞.

Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$, *la droite d'équation y = a est asymptote horizontale à(C)* en – ∞.

Exemple : En – ∞ et en + ∞ , on a: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Donc, l'axe des abscisses d'équation y = 0 est asymptote à l'hyperbole d'équation : $y = \frac{1}{x}$

IV) Asymptote oblique

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, si (C) est la courbe d'équation y = f(x) , et (D) la droite d'équation y = ax + b , la distance MN entre un point M de (C) et un point N de (D) de même abscisse x est : MN= $\left| f(x) - (ax + b) \right|$.

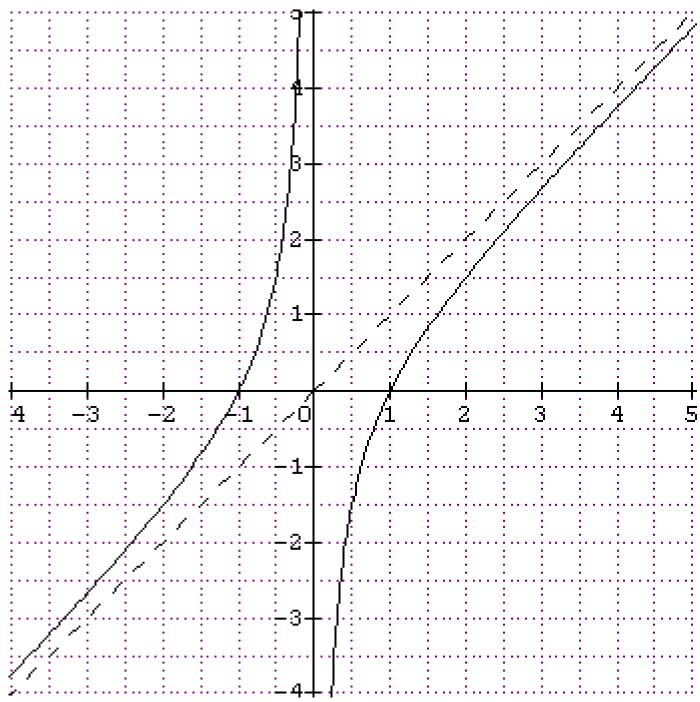
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, alors cette distance MN a pour limite 0 en + ∞ .

Vocabulaire :

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, *la droite d'équation y = ax + b est asymptote oblique à(C)* en + ∞.

Si $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, *la droite d'équation y = ax + b est asymptote oblique à(C)* en – ∞.

Exemple:



f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = x - \frac{1}{x}$$

Sa représentation graphique est la courbe (C) ci-contre.

En pointillés est tracée la droite (D) d'équation y =x.

On sait que : $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} -\frac{1}{x} = 0$

Donc, la droite (D) d'équation y = x est asymptote oblique à la courbe (C) représentative de f en + ∞ et en – ∞.

V) **Limite en un point (limite en un réel a)**

Cela nécessite que la fonction soit définie pour x = a , ou, sinon, que le nombre a soit l'une des bornes d'un intervalle où la fonction est définie.

1) Limite infinie en un point $a \in \mathbb{R}$:

- $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ signifie que:

« f(x) devient plus grand que n'importe quel nombre réel fixé à l'avance, à condition de choisir x suffisamment proche de a . »
Ce que l'on peut aussi énoncer sous la forme :
« Pour tout réel b (aussi grand que l'on veut), l'intervalle [b ; +∞ [contient toutes les images f(x) lorsque x est suffisamment proche de a. »

Dans ce cas, la fonction n'est pas définie en x = a (car + ∞ n'est pas un nombre), et l'on est souvent obligé d'étudier séparément les limites à gauche ou à droite de a .

Propriétés (admises) :

$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$ et plus généralement : $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \left(\frac{1}{x^n}\right) = +\infty$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \left(\frac{1}{|x|}\right) = +\infty$ $\quad$ $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$.

$\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \left(\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$ et plus généralement, lorsque $n \in \mathbb{N}^*$ avec **n pair** : $\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \left(\frac{1}{x^n}\right) = +\infty$.

$\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \left(\frac{1}{|x|}\right) = +\infty$

$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$, car la limite est la même à gauche et à droite .

De même, lorsque $n \in \mathbb{N}^*$ avec **n pair** : $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^n}\right) = +\infty$ et $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{|x|}\right) = +\infty$.

$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$, car le problème de la limite à gauche ne se pose pas dans ce cas-là !..

- $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ signifie que:

« f(x) devient inférieur à n'importe quel nombre réel fixé à l'avance, à condition de choisir x suffisamment proche de a . »
Ce que l'on peut aussi énoncer sous la forme :
« Pour tout réel b (aussi petit que l'on veut), l'intervalle] –∞ ; b [contient toutes les images f(x) lorsque x est suffisamment proche de a. »

Propriété : $\lim_{x\to a} [f(x)] = -\infty$ équivaut à : $\lim_{x\to a} [-f(x)] = +\infty$

Donc : $\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$ car $\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \left(-\frac{1}{x}\right) = -\infty$.

De même, lorsque $n \in \mathbb{N}^*$ avec **n impair** : $\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \left(\frac{1}{x^n}\right) = -\infty$.

2) **Limite finie en un point $a \in \mathbb{R}$:**

- $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}$ signifie que :

« f(x) devient aussi proche que l'on veut du nombre ℓ , à une distance fixée à l'avance aussi petite que l'on veut, à condition de choisir x suffisamment proche de a. »
Ce que l'on peut aussi énoncer sous la forme :
« Tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les images f(x) lorsque x est suffisamment proche de a.. »

a) **Si f est définie en $a \in \mathbb{R}$.**

Propriété 1 (admise)**:**

> **Si** une fonction f est définie sur un intervalle contenant $a \in \mathbb{R}$,
> **Si** f est une fonction polynôme, rationnelle, irrationnelle, valeur absolue, trigonométrique .. *(catégorie des fonctions continues : programme de TS),*
>
> **Alors** : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Exemple: $f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) avec f(3) = 9. Donc : $\lim_{x \to 3} (x^2) = 9$

b) **Si f n'est pas définie en $a \in \mathbb{R}$.**

Propriété 2 (admise)**:**

> **Si** f est une fonction qui n'est pas définie en x = a, mais telle que, pour tout réel x de son ensemble de définition on ait f(x) = g(x) où g est une fonction définie en x = a et du même type de celles de la propriété 1 ci-dessus,
>
> **Alors** : $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$

Exemple: Si f est définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ et g(x) = x + 1.
Pour tout $x \in \mathbb{R}-\{1\}$, on a f(x) = g(x) et g est définie sur $\mathbb{R}$, donc en x = 1.
Donc : $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} g(x) = g(1) = 2$

Remarque : cette propriété intuitive a été implicitement utilisée lors de l'étude des nombres dérivés.

3) **Pas de limite en un point** :

On peut avoir:
- Une limite à gauche et une limite à droite différentes.
- Pas de limite du tout (Ni à gauche, ni à droite).

Notations:
Lorsque ces limites existent, on écrit:
- Limite à gauche de a: $\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ abrégée parfois en: $\lim_{x \to a-} f(x)$
- Limite à droite de a: $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ abrégée parfois en: $\lim_{x \to a+} f(x)$

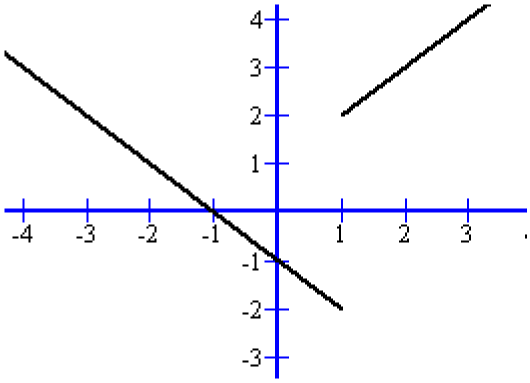
Exemple1:

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par: $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$.

Pour tout $x\in\,]-\infty\,;1[$, on a : $f(x) = -x - 1$ et pour tout $x\in\,]1\,;+\infty[$, on a : $f(x) = x + 1$.

On a donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(-x-1)=-2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x+1)=2$.

Les limite de f à gauche et à droite de 1 sont donc différentes.
La fonction n'a donc pas de limite en 1. Le graphique ci-dessous illustre cette situation.



Exemple2:

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par: $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Lorsque x tend vers zéro par valeurs positives, $\dfrac{1}{x}$ prend des valeurs de plus en plus grandes.

Mais, sur tout intervalle d'amplitude 2π, la fonction sinus prend toutes les valeurs réelles de l'intervalle $[-1\,;1]$.
Ainsi, f(x) prend toutes les valeurs réelles de l'intervalle $[-1\,;1]$ lorsque x tend vers zéro. f(x) ne tend donc vers aucune valeur réelle de cet intervalle $[-1\,;1]$. Afin d'observer ce phénomène, faire des zooms successifs au voisinage de zéro sur votre calculatrice graphique.

VI) Asymptote verticale

Dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$, lorsqu'une fonction f admet une limite infinie ($-\infty$,$+\infty$, à gauche, à droite, ou des deux côtés) en un point $a\in\mathbb{R}$, on dit que :
La droite d'équation x = a est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f.

Dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$, la droite d'équation x = a est donc asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=+\infty$

ou $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=-\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=-\infty$

Exemple:

L'axe des ordonnées (d'équation x = 0) est asymptote verticale aux courbes représentatives des fonctions : $x\mapsto\dfrac{1}{x^n}$ où $n\in\mathbb{N}^*$, c'est à dire aux représentations graphiques des fonctions inverses des puissances d'exposant entier strictement positif.