Approche de la notion de limite d'une fonction en un point.

SOMMAIRE

I) La fonction f est définie au voisinage d'un nombre a, mais pas en a.

Ce nombre a est une borne d'un intervalle où la fonction f est définie. On étudie alors le comportement de f(x) lorsque la variable x se rapproche du nombre a, sans pouvoir prendre la valeur a car f(a) n'existe pas.

Pour étudier les fonctions suivantes, une calculatrice graphique ou un tableur sera utile.

Exercice 1 : La fonction f est définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par: $f(x)=\dfrac{3x^2-3x}{x-1}$.

Étudier les valeurs de f(x) lorsque x se rapproche de 1 de plus en plus près (à gauche, c'est à dire par valeurs inférieures à 1, puis à droite, c'est à dire par valeurs supérieures à 1.).

Réaliser le graphique de f pour $x\in[\ 0\ ;\ 1\ [\ \cup\ ]\ 1\ ;\ 2\ ]$. Comparer avec le tracé de votre calculatrice ! Chercher à faire afficher un graphique correct.

Exercice 1 bis : La fonction g est définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par: $g(x)=\dfrac{x^3-x^2}{x-1}$.

Mêmes questions que pour l'exercice 1.

Exercice 2 : La fonction f est définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par: $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$.

Valeur absolue: touche ou fonction calculatrice **Abs**

Étudier les valeurs de f(x) lorsque x se rapproche de 1 de plus en plus près (à gauche, c'est à dire par valeurs inférieures à 1, puis à droite, c'est à dire par valeurs supérieures à 1).

Réaliser le graphique de f pour $x\in[\ 0\ ;\ 1\ [\ \cup\ ]\ 1\ ;\ 2\ ]$. Comparer avec le tracé de votre calculatrice ! Chercher à faire afficher un graphique correct.

Exercice 2 bis : La fonction g est définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par: $g(x)=\dfrac{x(x-1)}{|x-1|}$.

Mêmes questions que pour l'exercice 2.

Exercice 3 : La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par: $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

Étudier les valeurs de f(x) lorsque x se rapproche de 0 de plus en plus près (à gauche, c'est à dire par valeurs négatives, puis à droite, c'est à dire par valeurs positives.).

Réaliser le graphique de f pour $x\in[\ -1\ ;\ 0\ [\ \cup\ ]\ 0\ ;\ 1\ ]$.

Exercice 4 : La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par: $f(x) = \frac{1}{x}$.

Étudier les valeurs de f(x) lorsque x se rapproche de 0 de plus en plus près (à gauche, c'est à dire par valeurs négatives, puis à droite, c'est à dire par valeurs positives).
Réaliser le graphique de f pour $x \in [-1 ; 0 [\cup] 0 ; 1]$.

Exercice 5 : La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par: $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Étudier les valeurs de f(x) lorsque x se rapproche de 0 de plus en plus près (à gauche, c'est à dire par valeurs négatives, puis à droite, c'est à dire par valeurs positives.).
Sur votre calculatrice graphique, essayez de visualiser la courbe représentative de f au voisinage de 0, à l'aide de zooms de plus en plus fins. Que conclure?

II) La fonction f est définie au voisinage d'un nombre a, et aussi en a.

On étudie ici le comportement de f(x) lorsque la variable x se rapproche du nombre a, avec ici la possibilité de prendre la valeur a car f(a) existe.

Exercice 6 :
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par: f(x) = int(x) , où int(x) désigne la partie entière de x, c'est à dire le nombre entier relatif vérifiant: $\text{int}(x) \leqslant x < \text{int}(x) + 1$.
Étudier les valeurs de f(x) lorsque x se rapproche de 2 de plus en plus près (à gauche, c'est à dire par valeurs inférieures à 2, puis à droite, c'est à dire par valeurs supérieures à 2.).
Réaliser le graphique de f pour $x \in [1;3]$.
Comparer avec le tracé de votre calculatrice ! Chercher à faire afficher un graphique correct.

Exercice 7 :
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x^2$.
Étudier les valeurs de f(x) lorsque x se rapproche de -2 de plus en plus près (à gauche, c'est à dire par valeurs inférieures à -2, puis à droite, c'est à dire par valeurs supérieures à -2).
Réaliser le graphique de f pour $x \in [-2,5 ; -1,5]$.

Exercice 8 :
(C) est un cercle de centre O et de rayon 2.
(C') est un cercle de centre O' et de rayon 1.
On note OO'=x.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, qui, à la distance x, fait correspondre f(x) = "nombre de tangentes communes aux cercles (C) et (C')".

1) Déterminer f(x) selon les valeurs de $x \in \mathbb{R}^+$.

2) Étudier les valeurs de f(x) lorsque x se rapproche de 3 de plus en plus près (à gauche, c'est à dire par valeurs inférieures à 3, puis à droite, c'est à dire par valeurs supérieures à 3.).

Réaliser le graphique de f pour $x \in [0;4]$.