Suites et fonctions: étude comparative

Remarque: Les suites numériques étant des fonctions particulières (définies sur $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$), on retrouvera nécessairement pour les suites et les fonctions, des propriétés analogues. Toutes les propriétés ne seront pas reprises ici, mais seulement celles dont la comparaison est instructive. Les suites apparaîtront dans la colonne de droite et les fonction numériques dans celle de gauche. Sauf cas particuliers, les suites sont définies sur $\mathbb{N}$ ou éventuellement une partie de $\mathbb{N}$ (à partir d'un certain rang n_0) et les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$ (la plupart du temps sur un **intervalle I**).

Sens de variation

f croissante sur I $\Leftrightarrow$ Pour tout $a\in I$ et $b\in I$, si $a \leqslant b$ alors $f(a) \leqslant f(b)$
f strictement croissante sur I $\Leftrightarrow$ Pour tout $a\in I$ et $b\in I$, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$
f décroissante sur I $\Leftrightarrow$ Pour tout $a\in I$ et $b\in I$, si $a \leqslant b$ alors $f(a) \geqslant f(b)$
f strictement décroissante sur I $\Leftrightarrow$ Pour tout $a\in I$ et $b\in I$, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$
f constante sur I $\Leftrightarrow$ Pour tout $a\in I$ et $b\in I$, si $a \leqslant b$ alors $f(a) = f(b)$
f monotone sur I $\Leftrightarrow$ f conserve le même sens de variation sur l'intervalle I
Si f est **dérivable** sur I, alors: f croissante sur I $\Leftrightarrow$ Pour tout $x\in I$, $f'(x) \geqslant 0$
Si f est **dérivable** sur I, alors: f décroissante sur I $\Leftrightarrow$ Pour tout $x\in I$, $f'(x) \leqslant 0$
Si f est **dérivable** sur I, alors: f constante sur I $\Leftrightarrow$ Pour tout $x\in I$, $f'(x) = 0$

(U_n) croissante $\Leftrightarrow$ Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a: $U_n \leqslant U_{n+1}$
(U_n) strictement croissante $\Leftrightarrow$ Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a: $U_n < U_{n+1}$
(U_n) décroissante $\Leftrightarrow$ Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a: $U_n \geqslant U_{n+1}$
(U_n) strictement décroissante $\Leftrightarrow$ Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a: $U_n > U_{n+1}$
(U_n) constante $\Leftrightarrow$ Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a: $U_n = U_{n+1}$
(U_n) monotone $\Leftrightarrow$ (U_n) est soit croissante, soit décroissant, soit constante.

Remarque: Il se peut que cela ne soit pas réalisé sur tout l'ensemble $\mathbb{N}$: préciser alors à partir de quel rang cela est vrai

Suites et fonctions majorées, minorées, bornées

f majorée sur I $\Leftrightarrow$ Il existe $M\in\mathbb{R}$, tel que, pour tout $x\in I$, on ait: $f(x) \leqslant M$
f minorée sur I $\Leftrightarrow$ Il existe $m\in\mathbb{R}$, tel que, pour tout $x\in I$, on ait: $f(x) \geqslant m$
f bornée sur I $\Leftrightarrow$ f est majorée et minorée sur I

(U_n) majorée $\Leftrightarrow$ Il existe $M\in\mathbb{R}$, tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on ait: $U_n \leqslant M$
(U_n) minorée $\Leftrightarrow$ Il existe $m\in\mathbb{R}$, tel que, pour tout $x\in\mathbb{N}$, on ait: $U_n \geqslant m$
(U_n) bornée $\Leftrightarrow$ f est majorée et minorée

Limite finie ($\ell\in\mathbb{R}$)

Limite en + ∞

Si f est définie sur $\mathbb{R}$ ou un intervalle de la forme [A; +∞[où $A\in\mathbb{R}$ et si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de f(x) pour x assez grand, on dit que f tend vers ℓ lorsque x tend vers + ∞. On écrit: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

Dans cette situation, la représentation graphique de f possède alors une asymptote horizontale d'équation y = ℓ en + ∞.

Exemple: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{x-1} = 2$

Si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite (Un) à partir d'un certain rang, on dit que (U_n) converge vers ℓ. On écrit: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$

Exemple: $\lim\limits_{n\to+\infty} 5-\dfrac{1}{2^n} = 5$

Limite en $-\infty$

Si f est définie sur ℝ ou un intervalle de la forme $]-\infty\,;A]$ où $A\in\mathbb{R}$ et si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de f(x) pour –x assez grand, on dit que f tend vers ℓ lorsque x tend vers $-\infty$. On écrit: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$

Dans cette situation, la représentation graphique de f possède alors une asymptote horizontale d'équation y = ℓ en $-\infty$.

Exemple: $\lim\limits_{x\to-\infty}(3+\frac{1}{x})=3$

insensé

Limite en un point $a\in\mathbb{R}$

Si f est définie sur ℝ ou un intervalle I contenant $a\in\mathbb{R}$ et si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de f(x) pour tout $x\in I$ assez proche de a, on dit que f tend vers ℓ lorsque x tend vers a. On écrit: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$.

Exemple: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

insensé

Limite infinie ($+\infty$)

Limite en $+\infty$

Si f est définie sur ℝ ou un intervalle de la forme $[A;+\infty[$ où $A\in\mathbb{R}$ et si tout intervalle ouvert du type $[B;+\infty[$ contient toutes les valeurs de f(x) pour x assez grand, on dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. On écrit: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Exemple: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-5x-6=+\infty$

Si tout intervalle ouvert du type $[B;+\infty[$ contient toutes les valeurs de U_n à partir d'un certain rang, on dit que (U_n) diverge vers $+\infty$. On écrit: $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n=+\infty$.

Exemple: $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^n=+\infty$

Limite en $-\infty$

Si f est définie sur ℝ ou un intervalle de la forme $]-\infty\,;A]$ où $A\in\mathbb{R}$ et si tout intervalle ouvert du type $[B;+\infty[$ contient toutes les valeurs de f(x) pour –x assez grand, on dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$. On écrit: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

Exemple: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-2x+3=+\infty$

insensé

Limite en un point $a \in \mathbb{R}$

Si f est définie sur un intervalle I contenant $a \in \mathbb{R}$ et si tout intervalle ouvert du type [B;+ ∞[contient toutes les valeurs de f(x) pour tout $x \in I$ assez proche de a, on dit que f tend vers + ∞ lorsque x tend vers a. On écrit: $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Dans cette situation, la représentation graphique de f possède alors une asymptote verticale d'équation x = a.

Exemple: $\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ $\quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$

insensé

Limite infinie (– ∞)

Limite en + ∞

Si f est définie sur $\mathbb{R}$ ou un intervalle de la forme [A; +∞[où $A \in \mathbb{R}$ et si tout intervalle ouvert du type]– ∞ ; B] contient toutes les valeurs de f(x) pour x assez grand, on dit que f tend vers – ∞ lorsque x tend vers + ∞. On écrit: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Exemple: $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{1-x} = -\infty$

Si tout intervalle ouvert du type]– ∞ ; B] contient toutes les valeurs de U_n à partir d'un certain rang, on dit que (U_n) diverge vers – ∞. On écrit: $\lim_{x \to +\infty} U_n = -\infty$.

Exemple: $\lim_{x \to +\infty} 1-2^n = -\infty$

Limite en – ∞

Si f est définie sur $\mathbb{R}$ ou un intervalle de la forme]– ∞ ; A] où $A \in \mathbb{R}$ et si tout intervalle ouvert du type]– ∞ ; B] contient toutes les valeurs de f(x) pour –x assez grand, on dit que f tend vers – ∞ lorsque x tend vers – ∞. On écrit: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ Exemple:

$\lim_{x \to -\infty} x^3 + 2x^2 - x + 2 = -\infty$

insensé

Limite en un point $a \in \mathbb{R}$

Si f est définie sur $\mathbb{R}$ ou un intervalle I contenant $a \in \mathbb{R}$ et si tout intervalle ouvert du type]– ∞ ; B] contient toutes les valeurs de f(x) pour tout $x \in I$ assez proche de a, on dit que f tend vers – ∞ lorsque x tend vers a. On écrit: $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Dans cette situation, la représentation graphique de f possède alors une asymptote verticale d'équation x = a.

Exemple: $\lim_{x \to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$ $\quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$

insensé

Pas de limite

Sans entrer dans les détails théoriques, je vais citer quelques exemples de fonctions et de suites ne possédant pas de limite. Il est intéressant de visualiser ces exemples sur une calculatrice graphique.

1) f définie sur $\mathbb{R}^*$ par: $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Nous avons: Si x > 0, f(x) = 1, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = 1$ et si x < 0, f(x) = –1, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x) = -1$

Les limites à gauche et à droite de 0 existent, mais sont différentes. Donc f n'a pas de limite en 0.

2) f définie sur $\mathbb{R}^*$ par: $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ne possède ni limite à droite, ni limite à gauche de 0. En effet, il est facile de voir que les nombres x proches de 0 ont des images qui oscillent sur l'intervalle [–1;1], sans jamais se rapprocher d'une valeur particulière...

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n = \sin n$ prend une infinité de valeurs sur l'intervalle [–1 ; 1], sans jamais se rapprocher d'une valeur limite.

4) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n = (-1)^n$ prend alternativement les valeurs –1 et 1, donc pas de limite.

Théorèmes de comparaison

Pour les fonctions, dans les propriétés ci-dessous, la lettre a désigne aussi bien un réel que + ∞ ou – ∞.

Lorsque a = + ∞, les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ ou un intervalle I de la forme [A ; + ∞ [où A est un réel.

Lorsque a = – ∞, les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ ou un intervalle I de la forme] – ∞ ; A] où A est un réel.

Lorsque $a\in\mathbb{R}$, les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ ou un intervalle I de la forme [A ; B] où A et B sont des réels et $a\in$ [A ; B].

Si la limite concernée est la limite à gauche de a, les fonctions sont définies sur un intervalle I de la forme] – ∞ ; a [ou [A ; a [où A est un réel.

Si la limite concernée est la limite à droite de a, les fonctions sont définies sur un intervalle I de la forme] a ; + ∞ [ou] a ; A] où A est un réel.

Pour les suites, l'indice n est un entier naturel supérieur ou égal à un certain rang n_0 (qui sera souvent 0).

« Toute fonction supérieure à une fonction ayant pour limite + ∞ a pour limite + ∞»:

• Si, pour tout $x\in I$, on a: $u(x) \le v(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} u(x) = +\infty$, alors: $\lim\limits_{x\to a} v(x) = +\infty$.

« Toute fonction inférieure à une fonction ayant pour limite – ∞ a pour limite – ∞»:

• Si, pour tout $x\in I$, on a: $u(x) \le v(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} v(x) = -\infty$, alors: $\lim\limits_{x\to a} u(x) = -\infty$.

Théorème dit des "gendarmes":

« Toute fonction encadrée entre 2 fonctions ayant même limite $\ell\in\mathbb{R}$ a pour limite ℓ »

• Si, pour tout $x\in I$, on a: $u(x) \le v(x) \le w(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} u(x) = \lim\limits_{x\to a} w(x) = \ell$,

alors: $\lim\limits_{x\to a} v(x) = \ell$.

« Conservation des inégalités à la limite »:

• Si, pour tout $x\in I$, on a: $u(x) \le v(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} u(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to a} v(x) = \ell'$, alors: $\ell \le \ell'$.

« Toute suite supérieure à une suite ayant pour limite + ∞ a pour limite + ∞»:

• Si, pour tout entier $n \ge n_0$, on a: $u_n \le v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

« Toute suite inférieure à une suite ayant pour limite – ∞ a pour limite – ∞ »

• Si, pour tout entier $n \ge n_0$, on a: $u_n \le v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Théorème dit des "gendarmes":

« Toute suite encadrée entre 2 suites ayant même limite $\ell\in\mathbb{R}$ a pour limite ℓ »

• Si, pour tout entier $n \ge n_0$ on a: $u_n \le v_n \le w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$,

alors: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

« Conservation des inégalités à la limite »:

• Si, pour tout entier $n \ge n_0$ on a: $u_n \le v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$, alors: $\ell \le \ell'$.