Introduction aux Probabilités

La théorie des probabilités consiste à mathématiser le hasard, c'est à dire les phénomènes aléatoires et donner un sens précis aux phrases du type:

"A pile ou face, j'ai une chance sur deux d'obtenir pile."

"Au Loto, il est nettement plus probable de perdre, que de gagner 1 000 000 €."

"Dans une classe de 34 élèves, la probabilité que deux élèves aient le même jour anniversaire est environ 80 %."

Expérience (ou épreuve) aléatoire: Expérience dont il est impossible de prévoir le résultat.

Par exemple:
- Lancer une pièce de monnaie: On ne peut prévoir si la pièce va tomber sur pile ou sur face.
- Lancer un dé cubique: On ne peut prévoir si le dé va se stabiliser sur la face 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.
- Tirage d'une carte dans un jeu de 32 cartes.

Issues - Univers des possibles:

Les résultats possibles d'une expérience aléatoire sont appelés les éventualités ou les **issues** de l'expérience aléatoire.

L'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire s'appelle référentiel ou **Univers** des possibles. On le note souvent: Ω .

Étude d'exemples d'expériences aléatoires:

Expérience 1:
On lance une pièce de monnaie en l'air. On regarde si la face supérieure est Pile ou Face.

Expérience 2:
Expérience analogue, mais en lançant simultanément deux pièces.

Expérience 3:
On jette un dé cubique (non truqué) . Le résultat est le numéro lisible sur la face supérieure.

Expérience 4:
On extrait d'un jeu de 32 cartes, une carte au hasard. Le résultat est la carte tirée.

Exercice 1:
Pour chaque expérience ci-dessus, indiquer l'univers des possibles.

Problème:
Comment définir une probabilité sur l'univers des possibles Ω ?

Il faut essayer de construire une fonction p de Ω vers $\mathbb{R}$ vérifiant certaines propriétés que nous allons mettre en évidence grâce aux exemples des expériences aléatoires précédentes.

Expérience 1: On dit "qu'on a autant de chance d'obtenir Pile (P) que Face (F).

Nous dirons que la probabilité d'obtenir Pile est $\frac{1}{2}$ et que la probabilité d'obtenir Face est $\frac{1}{2}$.

On écrira: $p(P) = p(F) = \frac{1}{2}$.

Expérience 3: Chaque face a autant de chance d'apparaître, donc:

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$$ (On dit parfois: "une chance sur 6.").

Expérience 4:

Chaque carte a la même probabilité d'être tirée, chaque issue aura donc une probabilité de: $\frac{1}{32}$.

Expérience 2:

A-t-on autant de "chance" d'obtenir 2 Piles, 2 Faces ou Pile et Face?

On pourrait penser, en calquant notre intuition sur celle des 3 expériences précédentes que la réponse pourrait être une chance sur trois pour chacune des 3 issues apparentes. Cette intuition trop rapide et superficielle ne sera pas confirmée par un recours à un procédé statistique: On répète l'expérience un grand nombre de fois et l'on étudie l'évolution de la fréquence d'apparition des différentes issues: PP, FF ou PF.

Comme je vous l'ai montré en classe avec la simulation sur tableur, je résume ci-dessous un des résultats obtenus :

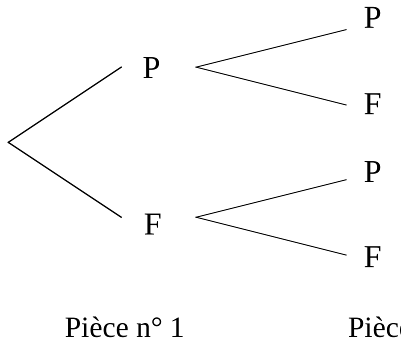
Nombre de lancers	**Effectifs PP**	**Effectifs FF**	**Effectifs PF**	**Fréquences PP**	**Fréquences FF**	**Fréquences PF**
500	134	113	253	0,268	0,226	0,506
1000	257	231	512	0,257	0,231	0,512
1500	361	360	779	0,241	0,240	0,519
2000	495	492	1013	0,248	0,246	0,507
2500	622	614	1264	0,249	0,246	0,506
3000	753	731	1516	0,251	0,244	0,505
3500	881	872	1747	0,252	0,249	0,499
4000	1006	987	2007	0,252	0,247	0,502
4500	1129	1130	2241	0,251	0,251	0,498
5000	1253	1259	2488	0,251	0,252	0,498

On remarque alors que, plus le nombre d'épreuve augmente, plus les fréquences d'apparition des 3 issues semblent se stabiliser et se rapprocher de nombres fixes. Plus précisément, sur notre exemple, on obtient:

- la fréquence d'apparition de l'issue PP, lorsque le nombre d'épreuve devient très grand, a pour limite: 0,25.
- la fréquence d'apparition de l'issue FF, lorsque le nombre d'épreuve devient très grand, a pour limite: 0,25.
- la fréquence d'apparition de l'issue PF, lorsque le nombre d'épreuve devient très grand, a pour limite: 0,5 .

Ceci découle en effet d'une propriété appelée "loi des grands nombres" dont l'énoncé stipule que, si l'on répète de très nombreuses fois une épreuve aléatoire, la limite de la fréquence d'apparition d'une issue est la probabilité de cette issue.

Ceci aurait pu être prévu a priori, grâce à un arbre de dénombrement:



Pièce n° 1 Pièce n° 2

Par cet arbre, on obtient 4 chemins ayant les mêmes "chances" d'apparition. En probabilités, on dira: on obtient 4 issues équiprobables, à condition de différencier les deux pièces: PP, FF, PF et FP. Chaque issue aura alors la même probabilité: $\frac{1}{4}$. En notant :

PP l'issue: "Obtenir P sur la pièce n°1 et P sur la pièce n° 2"
FF l'issue: "Obtenir F sur la pièce n°1 et F sur la pièce n° 2"
PF l'issue: "Obtenir P sur la pièce n°1 et F sur la pièce n° 2"
FP l'issue: "Obtenir F sur la pièce n°1 et P sur la pièce n° 2"

On écrira alors: $p(PP)=p(FF)=p(PF)=p(FP)=\frac{1}{4}$

Si l'on est incapable de différentier les deux pièces. En notant :
A l'issue: "Obtenir deux P "
B l'issue: "Obtenir deux F "
C l'issue: "Obtenir un P et un F "
On peut alors écrire: $p(A)=p(B)=\frac{1}{4}$ et $p(C)=\frac{1}{2}$.
Ceci qui explique le résultat statistique obtenu ci-dessus!

Remarque:

En probabilités, on ne s'intéresse pas seulement aux **issues** (Éléments de l'univers Ω), mais aux **événements** (Sous-ensembles de l'univers Ω).

Regardons cela sur un autre **exemple**.

Soit l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé cubique (non truqué) et à lire le numéro inscrit sur la face supérieure du dé.
Chaque face a autant de chance d'apparaître, donc: $p(1)=p(2)=p(3)=p(4)=p(5)=p(6)=\frac{1}{6}$.
On définit les événements suivants:

$A=$ « Obtenir un nombre pair » est l'événement: { 2 ; 4 ; 6 } qui est réalisé lorsque 2, 4 ou 6 est réalisé. On prendra naturellement: $p(A)=p(2)+p(4)+p(6)=\frac{1}{2}$.

$B=$ « Obtenir un nombre impair » = { 1 ; 3 ; 5 } est **l'événement contraire de A**. On écrit: $B=\overline{A}$.
Cela signifie : $\omega\in\overline{A}$ équivaut à : $\omega\notin A$. On a $p(B)=\frac{1}{2}$

C = « Obtenir un nombre supérieur à 4 » = { 5 ; 6 }. On a $p(C)=\frac{1}{3}$.

$\overline{C}$ = « »= { }. On a: $p(\overline{C})=$

D = « Obtenir le carré d'un nombre entier »= { }. On a: $p(D)=$

Ω = « Obtenir 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 »= { 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 } est **l'événement certain.** On a: *p(Ω)*=

$\emptyset$ = « Obtenir 7 »= { 7 } est **l'événement impossible.** On a: $p(\emptyset)=$

$A\cap C=$ « Obtenir un nombre pair supérieur à 4 »= { 6 } : $A\cap C$ est réalisé lorsque A et C sont réalisés simultanément.
Ici, cet événement n'a qu'une seule issue (singleton): C'est un des 6 **événements élémentaires.**

$A\cup C=$ « Obtenir un nombre pair ou supérieur à 4 »= { 2 ; 4 ; 5 ; 6 }. A noter que le "ou" des mathématiques n'est pas exclusif: le nombre 6, bien qu'appartenant aux deux événements appartient aussi à la réunion de ces deux événements. C'est à dire que $A\cup C$ est réalisé lorsque A est réalisé ou B est réalisé, cela n'excluant pas que A et B soient tous les deux réalisés!

$C\cap D=\emptyset$. En effet, dans Ω, les issues qui sont des carrés d'entiers ne sont pas des nombres supérieurs à 4.
On dit que les événements C et D sont **incompatibles** ou disjoints.

Exercice 2:

En utilisant l'exemple précédent, répondre aux questions:

1) Quel est l'événement contraire de l'événement certain?

2) Que peut-on dire des probabilités de deux événements contraires?

3) Deux événements contraires sont-ils incompatibles?

4) Deux événements incompatibles sont-ils contraires ?

5) Connaissant les probabilités de deux événement A et B, comment calculer la probabilité de la réunion de ces deux événements?

a) Dans le cas où A et B sont incompatibles.

b) Dans le cas général.

Résumé du cours sur les événements et la probabilité d'un événement

- Toutes les **issues** forment **l'univers** des possibles Ω.
- Les sous-ensembles de Ω sont des **événements**.

Ω est l'**événement certain**.

$\emptyset$ est l'**événement impossible**.

Les événements n'ayant qu'une seule issue (singleton) sont des **événements élémentaires de l'univers** Ω.

Si A et B sont deux événements, on note:

$A \cap B$: Événement pour lequel $\boldsymbol{A}$ **et** $\boldsymbol{B}$ sont réalisés simultanément.

$A \cup B$: Événement pour lequel $\boldsymbol{A}$ **ou** $\boldsymbol{B}$ est réalisé. Cela n'excluant pas que A et B soient tous les deux réalisés!

$\overline{A}$ est **l'événement contraire** de A: Il est réalisé lorsque A ne l'est pas.

Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que les événements A et B sont **incompatibles** ou disjoints.

- Pour définir une probabilité sur Ω, on définit une fonction $\begin{array}{l} p : \Omega \to [0\,;1] \\ \omega \to p(\omega) \end{array}$

On étend cette définition à tout les événements $A \subset \Omega$, grâce à la propriété:

$\boldsymbol{p(A)}$ **est la somme des probabilités des issues appartenant à l'événement** $\boldsymbol{A}$**.**

On en déduit alors que :

$\boldsymbol{0 \leqslant p(A) \leqslant 1}$ $\qquad$ $\boldsymbol{p(\Omega) = 1}$ $\qquad$ $\boldsymbol{p(\emptyset) = 0}$

A et B étant deux événements de Ω : $\qquad p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

Si A et B sont incompatibles, c'est à dire $A \cap B = \emptyset$, on a: $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Avec deux événements A et B quelconques: $\boldsymbol{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$

Cas d'équiprobabilité:

Si Ω possède n issues équiprobables, chaque issue a une probabilité de: $\dfrac{1}{n}$.

Si l'événement A possède a issues équiprobables, alors: $p(A) = \dfrac{a}{n}$.

Exercice 3:

En utilisant les événements de l'exemple précédent le cours, déterminer les événements suivants et calculer leurs probabilités:
$\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$, $A \cap B$, $A \cap D$, $B \cap C$, $B \cap D$, $C \cap D$, $A \cup B$, $A \cup D$, $B \cup C$, $B \cup D$ et $C \cup D$.

Exercice 4:

On tire au hasard une carte dans un jeux de 32 cartes. Calculer la probabilité d'obtenir:

1)Le roi de trèfle.
2)Un roi.
3)Un trèfle.
4)Un roi ou un trèfle.
5)Ni roi, ni trèfle.

Exercice 5:

On lance deux dés non truqués. Si la somme des points obtenus est 5, 6, 7 ou 8, je gagne. Sinon, c'est toi qui gagne.
Prouver que ce jeu n'est pas équitable.

Exercice 6:

On raconte qu'au XVI$^{\text{ème}}$ siècle, un jeu consistant à lancer trois dés et à totaliser les points obtenus se pratiquait à la cour du Grand Duc de Toscane. Joueur assidu, le Grand Duc avait remarqué qu'on obtenait plus souvent 10 points que 9 points. Cela le surprenait grandement car, pensait-il, 10 points et 9 points se décomposent pareillement de 6 façons:

$$9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 1 + 4 + 4 = 2 + 2 + 5 = 2 + 3 + 4 = 3 + 3 + 3$$
$$10 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 2 + 6 = 2 + 3 + 5 = 2 + 4 + 4 = 3 + 3 + 4$$

Cardan, brillant mathématicien de cette époque, « sécha » sur ce problème. Le grand Galilée, lui, trouva la solution. Et vous ?

Exercice 7:

Un couple de futurs parents décide d'avoir 3 enfants.
On fait l'hypothèse (pas tout à fait exacte) que les bébés garçons et filles sont équiprobables.
Calculer la probabilité des événements suivants:

1)Ils auront 3 garçons.
2)Ils auront 3 filles.
3)Ils auront 2 garçons et 1 fille.
4)Ils auront 1 garçon et 2 filles
5)Les 3 enfants seront de même sexe.
6)Les 3 enfants ne seront pas de même sexe.
7)Ils auront au moins un garçon.

Notion de variable aléatoire*: Premier exemple basé sur l'exercice 7:*

A chaque événement élémentaire, on associe le nombre de garçon qu'il possède:

{FFF} $\mapsto$ 0
{FFG} $\mapsto$ 1
{FGF} $\mapsto$ 1
{GFF} $\mapsto$ 1
{GGF} $\mapsto$ 2
{GFG} $\mapsto$ 2
{FGG} $\mapsto$ 2
{GGG} $\mapsto$ 3

En construisant une telle fonction, on dit qu'on définit une **variable aléatoire** sur l'univers formé des 8 issues possibles.

Cela permet le classement des 8 événements en fonction du critère choisi (ici, le nombre de garçons).

Ceci permet de réaliser une **partition** de l'univers en 4 sous-ensembles disjoints dont la réunion est l'univers.

En notant G la variable aléatoire "nombre de garçons", l'univers est alors la réunion disjointe des 4 événements incompatibles notés:

$(G=0)$, $(G=1)$, $(G=2)$ et $(G=3)$

De façon plus précise:

$(G=0)=\{FFF\}$ de probabilité: $p(G=0)=\frac{1}{8}$

$(G=1)=\{FFG\}\cup\{GFF\}\cup\{FGF\}$ de probabilité: $p(G=1)=\frac{3}{8}$

$(G=2)=\{FGG\}\cup\{GGF\}\cup\{GFG\}$ de probabilité: $p(G=2)=\frac{3}{8}$

$(G=3)=\{GGG\}$ de probabilité: $p(G=3)=\frac{1}{8}$

La connaissance de chaque probabilité pour les valeurs prises par la variable aléatoire G définit **la loi de probabilité de la variable aléatoire** $\boldsymbol{G}$. Elle est souvent donnée sous forme de tableau:

nombre de garçons:	n	0	1	2	3
probabilités:	$p(G=n)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Les événements $(G=0)$, $(G=1)$, $(G=2)$ et $(G=3)$ réalisent une partition de l'univers, C'est à dire:

Il n'y a pas d'événement impossible.
Ces événements sont deux à deux incompatibles (intersections vides).
Leur réunion est l'univers en entier (événement certain).

On dit que ce sont les événements élémentaires de la variable aléatoire G. La somme des probabilités de ces événements est évidemment égale à 1.

Espérance mathématique de $\boldsymbol{G}$:

C'est la moyenne des valeurs prises par G, pondérées par les coefficients que sont leurs probabilités (barycentre). C'est à dire, ici:

Espérance mathématique de G: $E(G)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=1{,}5$

Ce résultat peut être interprété de la façon suivante:

« Lorsqu'on a 3 enfants, on peut espérer avoir, en moyenne, 1,5 garçons ! »

Voir formule générale dans le livre page 218.

Variance et écart type de G:

Comme pour les séries statistiques, ces indicateurs mesurent la dispersion des données autour de la moyenne, c'est à dire, pour une loi de probabilité, la dispersion des valeurs de la variable aléatoire autour de l'espérance mathématique de cette variable aléatoire.

Variance de G: Moyenne (pondérée par les probabilités associées), des carrés des écarts avec $E(G)$:

On a donc: $V(G)=\sum_{n=0}^{n=3}(n-E(G))^2\times p(G=n)$

Le calcul de la variance de G donne:

$$V(G)=(0-1{,}5)^2\times\frac{1}{8}+(1-1{,}5)^2\times\frac{3}{8}+(2-1{,}5)^2\times\frac{3}{8}+(3-1{,}5)^2\times\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$$

On peut aussi calculer la variance avec une autre formule (vérifier qu'elle est équivalente à la précédente):

$$V(G)=\sum_{n=0}^{n=3}n^2\times p(G=n)\ -\ [E(G)]^2$$

Ce calcul donne:

$$V(G)=0^2\times\frac{1}{8}+1^2\times\frac{3}{8}+2^2\times\frac{3}{8}+3^2\times\frac{1}{8}-1{,}5^2=\frac{3}{4}$$

Écart-type de G:

C'est la racine carrée de la variance: $\sigma(G)=\sqrt{V(G)}$

Ici: $\sigma(G)=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}87$

Voir formules générales et leçon dans le livre page 218.

Exercice 8:

On lance deux dés non truqués.

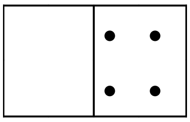
1)Étudier la loi de probabilité de la variable aléatoire:
S = « Somme des points obtenus sur les 2 dés ».
Calculer l'espérance mathématique et l' écart-type de la variable aléatoire S.

2)Étudier la loi de probabilité de la variable aléatoire:
D = « Différence des points obtenus sur les 2 dés ».
Calculer l'espérance mathématique et l' écart-type de la variable aléatoire D.

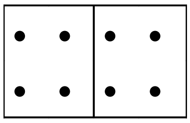
Exercice 9:

Un domino est une petite plaque dont un côté est divisé en deux parties comportant de zéro à six points.

Par exemple:



est le domino 04 (ou 40, car c'est le même à un demi-tour près!)



est le domino 44 (double 4)

1) Donner la liste des 28 dominos possibles.

On appellera U, l'ensemble de ces 28 dominos.

2) Les 28 dominos de U sont mis dans un sac. On effectue une épreuve aléatoire consistant à extraire au hasard un domino de l'ensemble U: Il y a donc équiprobabilité des tirages.

On définit les événements suivants:

A : Le domino porte le numéro 2.

B : Le domino porte au moins un numéro impair.

C : Le domino porte au moins un numéro pair.

D : Le domino porte un numéro pair et un numéro impair.

E : Le domino porte deux numéros pairs.

F : Le domino porte deux numéros impairs.

Calculer la probabilité des événements A, B, C, D, E et F. (On donnera les résultats sous forme d'une fraction irréductible).

3) On considère les événements: $\bar{D}$, $B \cap C$, $B \cup C$ et $E \cap F$.

Définissez-les à l'aide d'une phrase, ou bien reconnaissez l'un des événements cités dans le début du problème. Donner les probabilités de ces événements.

4) En utilisant les événements du 2) et en justifiant vos réponses, donner un exemple:

a) de 2 événements incompatibles qui ne sont pas contraires.

b) d'événements formant une partition de U.

5) Soit X la variable aléatoire égale à la valeur absolue de la différence des points marqués sur le domino extrait. Par exemple, le domino 25, appartient à l'événement (X=3).

a) Calculer les probabilités: p(X=0), p(X=1), p(X=2), p(X=3), p(X=4), p(X=5) et p(X=6).

b) Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X .

Exercice 10:

Un sac contient 2 boules rouges et 3 boules vertes. On tire une boule du sac, on note sa couleur, on la remet dans le sac, on mélange, puis on tire à nouveau une boule de ce sac.

1) Proposer un univers correspondant au problème et qui vérifie l'hypothèse d'équiprobabilité. Combien contient-il d'issues équiprobables ?

2) On note les événements:

R1: "avoir une boule rouge au premier tirage"

R2: "avoir une boule rouge au second tirage"

V1: "avoir une boule verte au premier tirage"

V2: "avoir une boule verte au second tirage"

Décrire à l'aide d'une phrase les événements: $R1 \cap R2$ et $V1 \cap V2$.

Calculer la probabilité de ces événements.

3) A l'aide de R1, R2, V1 et V2, exprimer les événement:

A: "avoir deux boules de couleur différente"

B: "avoir au moins une boule verte"

Calculer p(A) et p(B).

4) Effectuer le même travail que ci-dessus, mais en supposant que l'on ne remet pas la première boule dans le sac avant de tirer la seconde.

<u>Exercice 11</u>:

Un sac contient des jetons de 3 couleurs différentes: rouge, blanc, noir.
Sur chaque jeton est imprimé une lettre de l'alphabet.
Le sac est composé de:

5 jetons rouges marqués a, b, c , d , e
2 jetons blancs marqués f, g
3 jetons noirs marqués h, i, j

L'expérience aléatoire consiste à extraire au hasard un jeton du sac.
L'univers est donc constitué de 10 issues équiprobables.
On note les événements suivants:

R: Le jeton extrait est rouge
B: Le jeton extrait est blanc
N: Le jeton extrait est noir
C: Une consonne est marquée sur le jeton tiré
V: Une voyelle est marquée sur le jeton tiré

1) Proposer une représentation schématique de l'univers (autre qu'un arbre) mettant en évidence les divers attributs des jetons (couleur et lettre imprimée).

2) Calculer les probabilités des événements:
R, B, N, C, V, $R \cap C$, $R \cap V$, $B \cap C$, $B \cap V$, $N \cap C$ et $N \cap V$.

3) Réaliser deux arbres de probabilité différents permettant de résoudre les questions suivantes:

   a) Le jeton extrait est rouge. Quelle est la probabilité qu'une voyelle soit marquée dessus ?
   b) Le jeton extrait est rouge. Quelle est la probabilité qu'une consonne soit marquée dessus ?
   c) Le jeton extrait est blanc. Quelle est la probabilité qu'une voyelle soit marquée dessus ?
   d) Le jeton extrait est blanc. Quelle est la probabilité qu'une consonne soit marquée dessus ?
   e) Le jeton extrait est noir. Quelle est la probabilité qu'une voyelle soit marquée dessus ?
   f) Le jeton extrait est noir. Quelle est la probabilité qu'une consonne soit marquée dessus ?
   g) Une consonne est marquée sur le jeton. Quelle est la probabilité qu'il soit rouge ?
   h) Une consonne est marquée sur le jeton. Quelle est la probabilité qu'il soit blanc ?
   i) Une consonne est marquée sur le jeton. Quelle est la probabilité qu'il soit noir ?
   j) Une voyelle est marquée sur le jeton. Quelle est la probabilité qu'il soit rouge ?
   k) Une voyelle est marquée sur le jeton. Quelle est la probabilité qu'il soit blanc ?
   l) Une voyelle est marquée sur le jeton. Quelle est la probabilité qu'il soit noir ?