Limites de suites

Voir aussi livre pages 166 à 171.

Définitions et premières propriétés :

Remarque: Les suites étant des fonctions de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$, toutes les propriétés des limites des fonctions s'appliquent aux suites numériques. Cependant, la seule limite qui s'applique aux suites est celle qui concerne les « grandes valeurs » de $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.
Trois cas peuvent se présenter :

1) Limite finie:

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = a$ où $a \in \mathbb{R}$. Ceci signifie que tout intervalle ouvert contenant le réel *a* contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On dit alors que (U_n) ***converge vers a***.

Exemple:

La suite de terme général $U_n = \dfrac{n+1}{n}$ converge vers 1 car: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 1$.

Propriété : Lorsque (U_n) converge vers *a*, alors cette limite est unique.
Voir principe de la preuve de cette propriété dans le livre page172 (TD 1).

2) Limite infinie:

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$. Ceci signifie que tout intervalle du type $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$. Ceci signifie que tout intervalle du type $]-\infty\,;A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Exemples: $\lim\limits_{n \to +\infty} (n^2) = +\infty$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} (-\sqrt{n}) = -\infty$

3**) Pas de limite**:

(U_n) n'a pas de limite, ni finie ni infinie.

Exemple: $U_n = (-1)^n$ qui prend alternativement les valeurs 1 et (-1).

Dans les cas 2) et 3), on dit que la suite est ***divergente***.

Limites des suites de référence:

Les suites de terme général n, n^2, n^3, n^4,....ainsi que $\sqrt{n}$, $|n|$;sont divergentes et ont pour limite $+\infty$.
Les suites de terme général $\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{1}{n^2}$, $\dfrac{1}{n^3}$, $\dfrac{1}{n^4}$,.... $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $\dfrac{1}{|n|}$ sont convergentes et ont pour limite 0.

Pour les suites géométriques de type (q^n):

Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} q^n = 0$. La suite de terme général q^n converge vers 0.

Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} q^n = 1$. La suite de terme général 1^n est constante et converge vers 1.

Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} q^n = +\infty$. La suite de terme général $q^{n\wedge}$ diverge vers $+\infty$.

Si $q < -1$, alors la suite de terme général q^n diverge car elle n'a pas de limite (ses termes sont alternativement positifs, puis négatifs avec une valeur absolue tendant vers $+\infty$).

Si $q = -1$, alors la suite de terme général q^n diverge car elle n'a pas de limite (ses termes sont alternativement égaux à 1 et à -1).