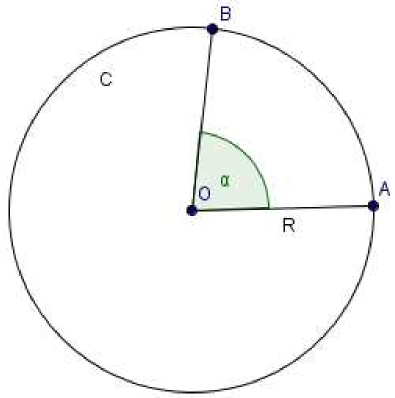
Rappels et compléments sur les angles

Longueur d'un arc de cercle. Mesure des angles: Choix d'une unité, le radian.



A et *B* étant deux points situés sur le cercle de centre *O*, on dit que l'angle au centre $\widehat{AOB} = \alpha$ intercepte l'arc $\widehat{AB}$.

Sur un cercle de rayon *R* fixé, on sait que la longueur de l'arc est proportionnelle à l'angle au centre α qui l'intercepte. En supposant que le rayon *R* et la longueur de l'arc sont mesurés avec la même unité, le coefficient de proportionnalité va dépendre du choix de l'unité de mesure de l'angle α.

Fraction de cercle (arc) Fraction de tour (angle)	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{a}{2\pi}$	$\frac{b}{360}$
Longueur de l'arc de cercle de rayon *R*	0	$\frac{\pi R}{6}$	$\frac{\pi R}{4}$	$\frac{\pi R}{3}$	$\frac{\pi R}{2}$	$\frac{2\pi R}{3}$	πR	$\frac{3\pi R}{2}$	$2\pi R$	R	aR	$\frac{b\pi R}{180}$
Longueur de l'arc de cercle de rayon 1	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	1	a	$\frac{b\pi}{180}$
Mesure de l'angle en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	1	a	$\frac{b\pi}{180}$
Mesure de l'angle en degrés	0	30	45	60	90	120	180	270	360	$\frac{180}{\pi}$	$\frac{180a}{\pi}$	b

La correspondance encadrée en gras dans le tableau ci-dessus est à connaître par cœur !

Conclusion:

- Un arc de cercle de rayon *R* intercepté par un angle au centre de α radians a pour longueur :

$$L = \alpha R.$$

- Un arc de cercle de rayon *R* intercepté par un angle au centre de α degrés a pour longueur :

$$L = \alpha R \frac{\pi}{180}.$$

On voit donc que le radian est une unité adaptée à ce type de problème!

Définition :

- Un angle de 1 radian est l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur *R* sur un cercle de rayon *R*.

En particulier, sur un cercle de rayon unité, un angle de 1 radian intercepte un arc de longueur unité .

Remarque :

Sur le cercle de centre *O* et de rayon $OA = OB = 1$ tel que $\widehat{AOB}$ mesure un radian, alors $\widehat{AOB}$ intercepte l'arc $\widehat{AB}$ de longueur 1. Le segment $[AB]$ a donc ici une longueur $AB < 1$: le triangle *OAB* n'est donc pas tout à fait équilatéral. En effet, on a:

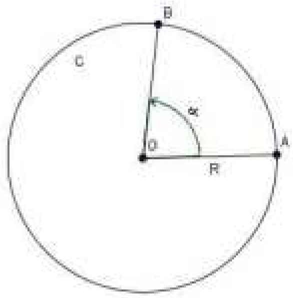
$$1\,rad = \frac{180}{\pi}\deg \approx 57{,}3\,° \qquad \text{et} \qquad 1° = \frac{\pi}{180}\,rad \approx 0{,}017\,rad$$

Dans la suite de ce texte l'unité utilisée sera le radian..

Remarque :
En mathématiques, sauf indication contraire, l'unité de mesure des angles est le radian.
Lorsque l'unité de mesure d'un angle n'est pas précisée, il s'agit forcément du radian. C'est le cas en particulier pour les fonctions trigonométriques.

Rotation de centre O. Orientation des angles.

Pour définir une rotation de centre *O*, il est nécessaire de choisir un sens direct autour du point *O*, et donc d'utiliser des angles orientés.



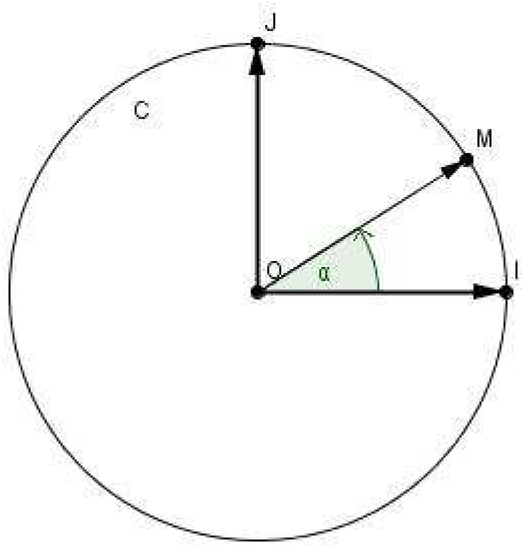
En appelant α l'angle orienté de la rotation de centre *O* transformant *A* en *B*, on a alors: $OA = OB = R$ et $\alpha = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

L'angle α est ici l'angle orienté défini par les deux vecteurs associés à la rotation.
Cet angle orienté α intercepte l'arc orienté $\widehat{AB}$ du cercle.

Remarque :
Le choix implicite du radian comme unité de mesure des angles va jusqu'à l'abus d'écriture toléré et même courant ! Écrire α = π signifie par exemple que l'angle α est plat.
Il y a donc confusion entre l'angle α et sa mesure en radians.
En plus de cet abus d'écriture, la mesure de l'angle α n'est même pas unique. Voyons cela :

On remarque que α n'est pas la seule mesure possible de cet angle orienté.
En effet, en faisant un tour de plus dans le sens direct, on obtient : $\alpha + 2\pi$.
En faisant un nombre entier k de tours dans le sens direct, on obtient : $\alpha + k \times 2\pi$.
De même, en tournant dans l'autre sens, on obtient: $\alpha - 2\pi$, $\alpha - 4\pi$, ... etc.
Donc, en général: $\boldsymbol{\alpha + 2k\pi}$ **où** $\boldsymbol{k \in \mathbb{Z}}$.
Parmi toutes ces mesures, celle qui correspond au parcours le plus court, c'est à dire celle appartenant à l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi\,]$ est appelée ***mesure principale de l'angle orienté*** $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

Cercle trigonométrique.

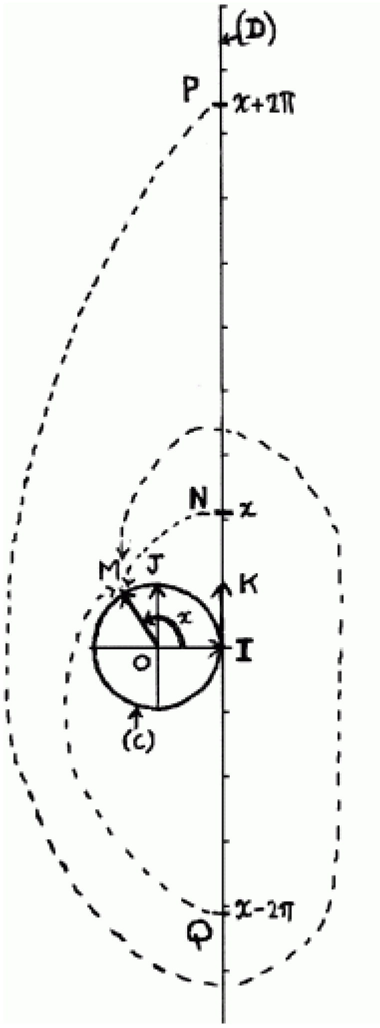


Un cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1, orienté dans le sens direct. On peut donc le munir d'un repère orthonormal de sens direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, c'est à dire que la rotation de centre *O* et d'angle droit transformant *I* en *J* est de sens direct et que les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ e $\overrightarrow{OJ}$ sont deux vecteurs unitaires.

Le cercle étant de rayon 1, tous les points *M* du cercle, sont tels que: $OM = 1$, donc $\overrightarrow{OM}$ est aussi un vecteur unitaire.

Donc, à tout point *M* du cercle trigonométrique on associe l'angle orienté des deux vecteurs unitaires : $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ qui est l'angle orienté de la rotation de centre *O* transformant *I* en *M*.

Enroulement d'une droite graduée sur le cercle trigonométrique.



(C) est un cercle trigonométrique de centre *O*.
$(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est un repère orthonormal de sens direct.
(D) est la droite tangente à *(C)* en *I*.
(D) est munie du repère $(I, \overrightarrow{IK})$ tel que $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{OJ}$.
On enroule la droite *(D)* autour du cercle *(C)* dans le sens direct pour les abscisses positives et indirect pour les abscisses négatives.

Ce procédé permet d'associer à tout point *N* de *(D)* le point *M* unique du cercle trigonométrique *(C)* sur lequel il vient s'appliquer.
Si *x* est l'abscisse du point *N* dans le repère $(I, \overrightarrow{IK})$ de la droite *(D)*, alors, d'après la définition du radian, le point *M* de *(C)* qui lui est associé est tel que: $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = x$.

Réciproquement, à tout point *M* du cercle trigonométrique *(C)*, correspond ainsi une infinité de points de la droite *(D)* : ce sont les points de *(D)* dont les abscisses sont de la forme $x + k \times 2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

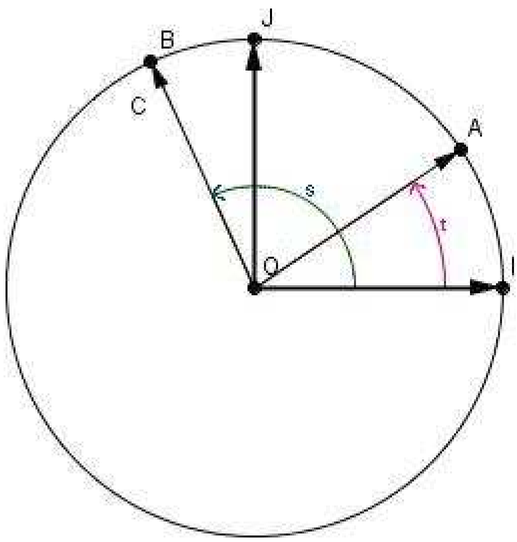
Sur le dessin ci-contre, on a par exemple :
N d'abscisse x = x + 0×2π.
P d'abscisse $x + 2\pi$ = x + 1×2π : 1 tour direct de plus que pour *N*.
Q d'abscisse $x - 2\pi$ = x − 1×2π : 1 tour indirect.

<u>Conclusion</u> :

Les réels $\boldsymbol{x + 2k\pi}$ **où** $\boldsymbol{k \in \mathbb{Z}}$ sont les mesures en radian de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ et lorsque $\boldsymbol{x \in]-\pi\,;\,\pi]}$, on dit que *x* est la ***mesure principale de l'angle orienté*** $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.

Mesure d'un angle orienté de deux vecteurs unitaires.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs unitaires (de norme 1), il est toujours possible de choisir deux représentants de même origine *O* : $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.
Le cercle orienté *(C)* de centre *O* et de rayon $OA = OB = 1$ est alors un cercle trigonométrique.

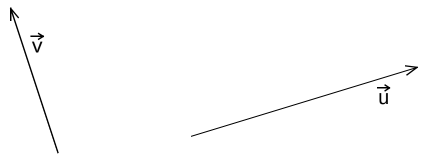


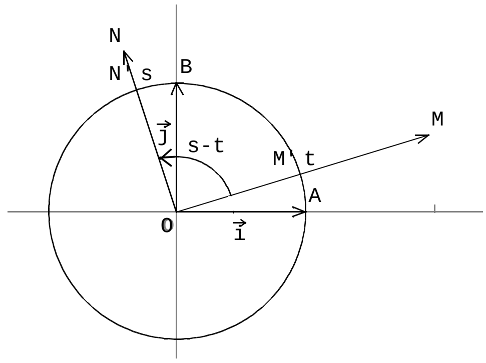
On peut alors munir *(C)* d'un repère orthomormal direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ dans lequel on aura :
$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = t$ *et* $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) = s$ où *t* et *s* sont les mesures principales de ces angles orientés.
Par la méthode d'enroulement du paragraphe précédent, on sait que les points *A* et *B* sont respectivement associés aux abscisses *t* et *s* de la droite graduée *(D)* tangente à *(C)* en *I*. On en déduit que l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ aura pour mesure la différence des abscisses des points associés à *B* et à *A*, c'est à dire: $s - t$ radians.
On a donc: $(\vec{u}, \vec{v}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = s - t$.

<u>Mesure d'un angle orienté de deux vecteurs non nuls</u>.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nul

on se ramène à deux représentants d'origine O
$\overrightarrow{OM}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{ON}=\vec{v}$



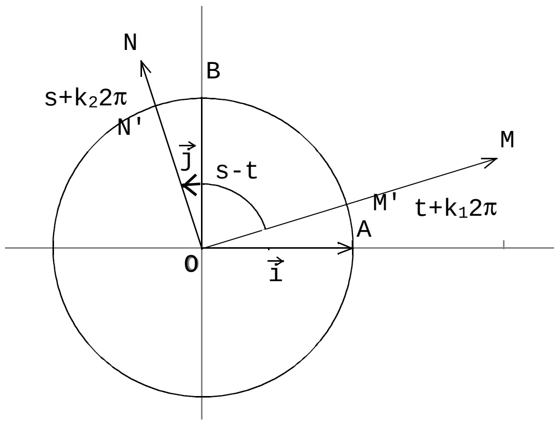


Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas unitaires, on se ramène sur le cercle trigonométrique grâce aux vecteurs unitaires:

$$\vec{u}\,'=\frac{1}{\|\vec{u}\|}\cdot\vec{u} = \overrightarrow{OM}\,' \quad \text{et} \quad \vec{v}\,'=\frac{1}{\|\vec{v}\|}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{ON}\,'$$

Si t et s sont les deux nombres réels associés respectivement à $M\,'$ et $N\,'$.
On aura alors, par définition : $(\vec{u}\,,\vec{v})=(\overrightarrow{OM}\,,\overrightarrow{ON})=(\overrightarrow{OM}\,'\,,\overrightarrow{ON}\,')=(\vec{i}\,,\overrightarrow{ON}\,')-(\vec{i}\,,\overrightarrow{OM}\,')=s-t$.
$s-t$ est alors une mesure en radians de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}\,,\vec{v})$

<u>Ensemble des mesures d'un angle orienté de vecteurs non nuls</u>.



Les points $M\,'$ et $N\,'$ sont repérés respectivement par les nombres réels t et s.

Les nombres associés à $M\,'$ sont de la forme $t + k_1 \times 2\pi$ ($k_1 \in \mathbb{Z}$)

Les nombres associés à $N\,'$ sont de la forme $s + k_2 \times 2\pi$ ($k_2 \in \mathbb{Z}$)

Tout nombre de la forme :
$s + k_1 \times 2\pi - t + k_2 \times 2\pi = s - t + k \times 2\pi$ ($k = k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$)
est donc une mesure de l'angle orienté de vecteurs .
$(\overrightarrow{OM}\,,\overrightarrow{ON})$

• Si r est une mesure de l'angle orienté , $(\overrightarrow{OM}\,,\overrightarrow{ON})$ alors l'ensemble des mesures de cet angle est l'ensemble des nombres de la forme $r + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.
• *La mesure principale* de $(\overrightarrow{OM}\,,\overrightarrow{ON})$ est la mesure qui appartient à $]-\pi\,;+\pi\,]$.

• s et t sont deux mesures du même angle orienté de vecteurs non nuls si et seulement si :
$s - t = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) .

On peut écrire alors (hors programme): $s = t\ [2\pi]$ qui se lit : s est égal à t modulo 2π.

On traduit ainsi le fait que s et t sont égaux à un multiple de 2π près.

Propriétés des angles orientés de vecteurs non nuls.

Les illustrations graphiques et les démonstration seront faites en classe.

Angle de deux vecteurs colinéaires.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens, alors l'angle est nul et $(\vec{u}, \vec{v}) = 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire, alors l'angle est plat et $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Ceci peut aussi s'énoncer sous la forme :

- Si $k > 0$, alors : $(\vec{u}, k\vec{u}) = 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.
- Si $k < 0$, alors : $(\vec{u}, k\vec{u}) = \pi + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Propriété de Chasles.

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}) + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

Angles opposés.

$$(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v}) + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

Angles « opposés par le sommet ».

$$(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

De façon plus générale , si $k \neq 0$, $(k\vec{u}, k\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Angles « supplémentaires ».

$$(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

Lien avec les angles non orientés.

Si $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \alpha$, alors $\widehat{AOB} = |\alpha|$.

Somme des angles d'un triangle.

Si ABC est un triangle, alors :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \pi + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$