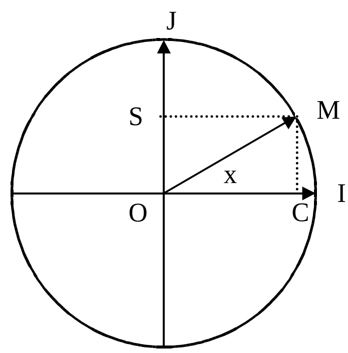
Trigonométrie

Définition du sinus et cosinus d'un réel quelconque.(révision de seconde)
Lien avec la définition du sinus et du cosinus d'un angle aigu (dans un triangle rectangle) **vue au collège.**



Cette généralisation est obtenue à l'aide du cercle trigonométrique muni du repère orthonormal direct $(O\ ;\overrightarrow{OI}\ ;\overrightarrow{OJ})$, où un angle aigu de triangle rectangle correspond à une mesure *x* (en radians) de cet angle avec $x\in\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

On associe au nombre *x* le point *M* unique du cercle trigonométrique tel que : $(\overrightarrow{OI}\,,\overrightarrow{OM}) = \widehat{IOM} = x$.

Or $x\in\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$,

Donc *M* appartient au quart de cercle (entre *I* et *J*).

Le projeté orthogonal de *M* sur *(OI)* est le point *C* et le projeté orthogonal de *M* sur *(OJ)* est le point *S*.

Dans le triangle *OMC* rectangle en *C*, on a:

$$\cos x=\cos\widehat{IOM}=\cos\widehat{COM}=\frac{OC}{OM}=OC \quad \text{car } OM=1.$$

$$\sin x=\sin\widehat{IOM}=\sin\widehat{COM}=\frac{MC}{OM}=OS \quad \text{car } OM=1 \text{ et } OS=MC.$$

Par construction, on a: $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OS}=\cos x\cdot\overrightarrow{OI}+\sin x\cdot\overrightarrow{OJ}$ donc:

$$\boxed{\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix} \text{ dans la base } (\overrightarrow{OI}\,,\overrightarrow{OJ}) \text{ et } M\,(\cos x\,;\sin x) \text{ dans le repère } (O\,,\overrightarrow{OI}\,,\overrightarrow{OJ})}$$

Ceci va être la définition générale de $\sin x$ *et de* $\cos x$ *, même pour les nombres situés à l'extérieur de l'intervalle* $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$. ***Voir aussi page 260 du livre qui traite ce sujet****.*

Définitions :

Pour tout réel *x*, il existe un point *M* unique du cercle trigonométrique muni du repère orthonormal direct $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j})$ tel que $(\vec{i}\,,\overrightarrow{OM}) = x + 2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$.

Le cosinus et le sinus de *x* sont les coordonnées de *M* dans le repère $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j})$.

On a : $M\,(\cos x\,;\sin x)$ c'est à dire : $\boxed{\overrightarrow{OM}=\cos x\cdot\vec{i}+\sin x\cdot\vec{j}}$.

Pour tout réel $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$, la tangente de *x* est définie par : $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$.

<u>Propriétés</u> :

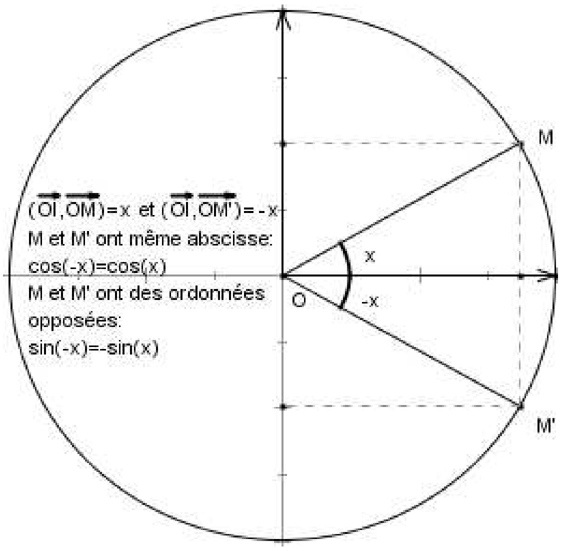
Pour tout réel x , on a:

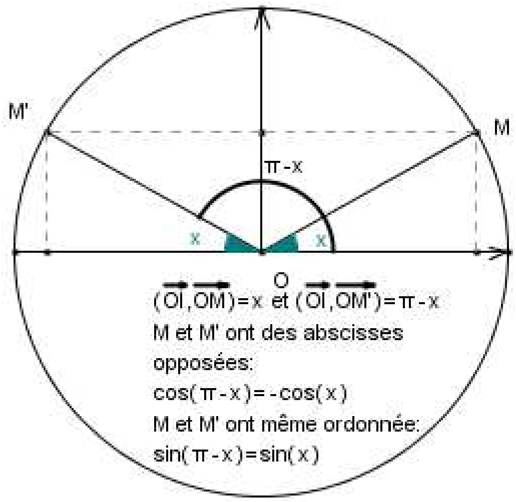
- $(\sin x)^2+(\cos x)^2=1$ que l'on écrit aussi sous la forme: $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.
- $\cos(-x)=\cos x$ La fonction cosinus est donc paire.
- $\sin(-x)=-\sin x$ La fonction sinus est donc impaire.
- Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $\cos(x+2k\pi)=\cos x$ et $\sin(x+2k\pi)=\sin x$.

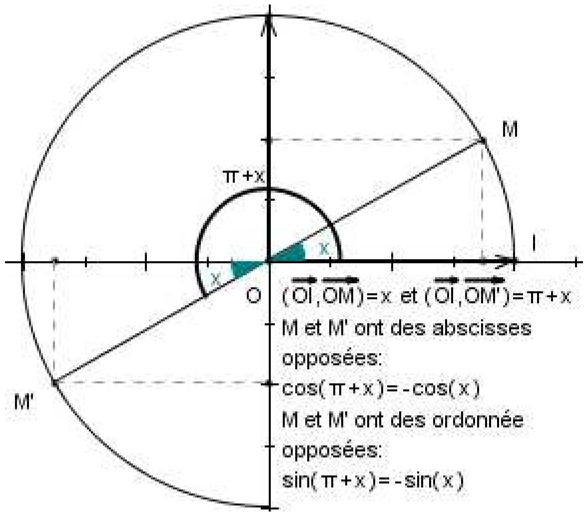
Les fonctions cosinus et sinus sont donc périodiques de période 2π , car $T=2\pi$ est le plus petit réel strictement positif tel que: $\cos(x+T)=\cos x$ et $\sin(x+T)=\sin x$.

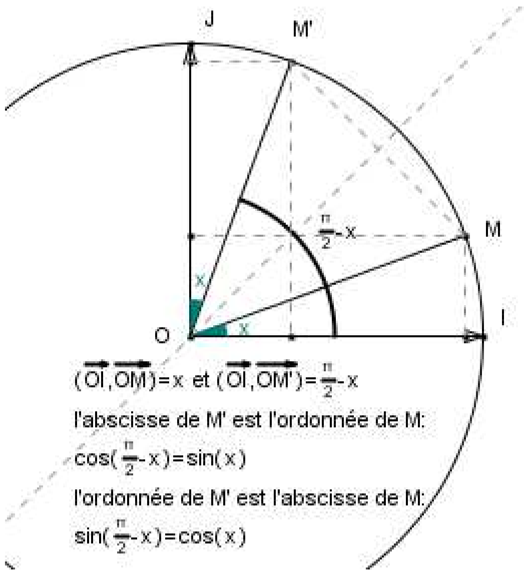
- $-1\leqslant\cos x\leqslant 1$ et $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$

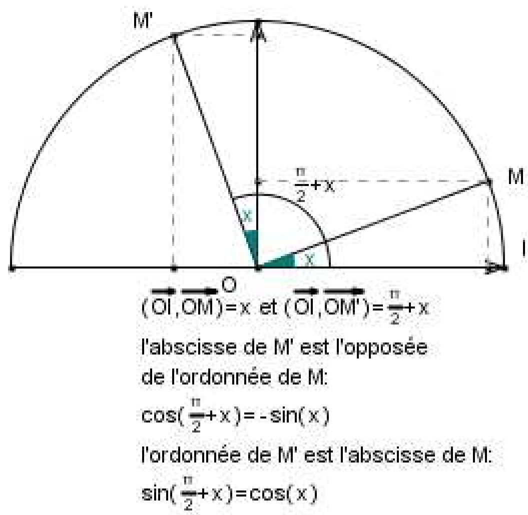
• <u>Angles associés</u> :



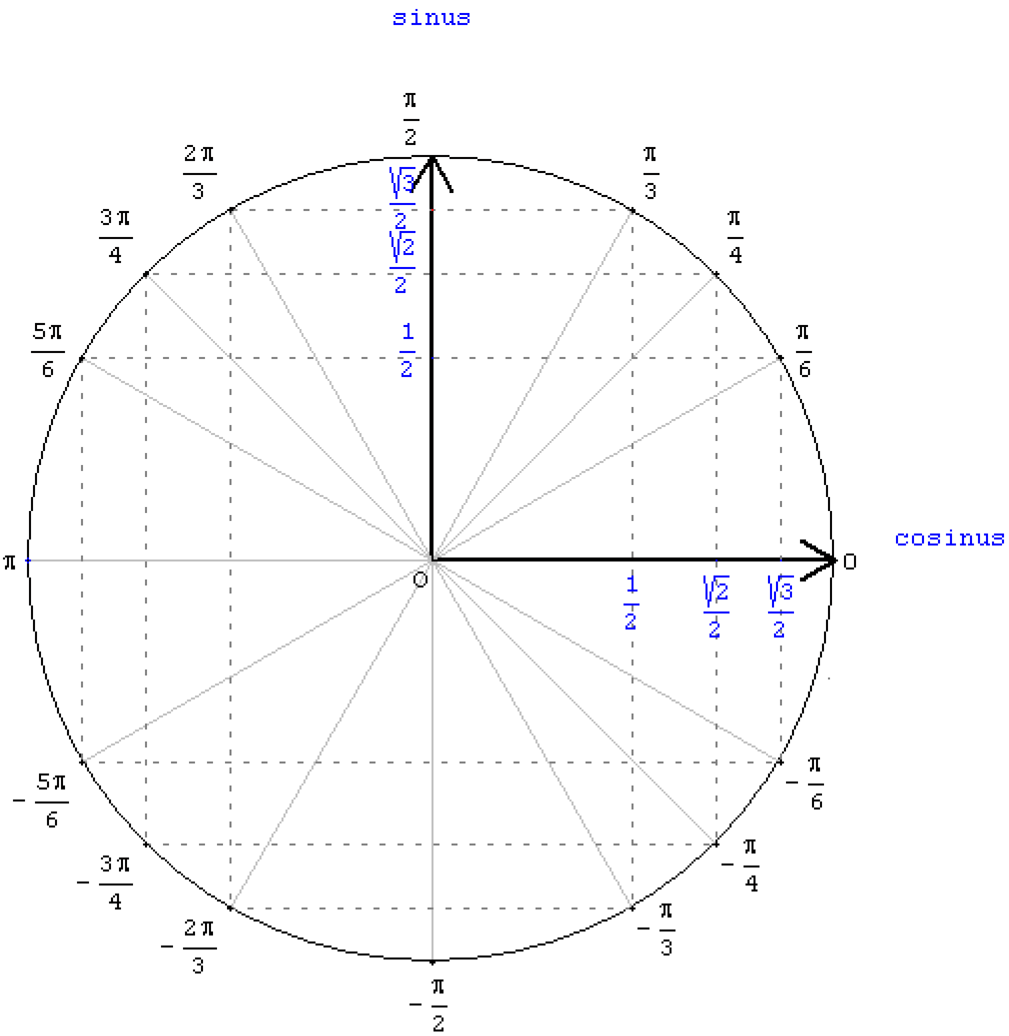




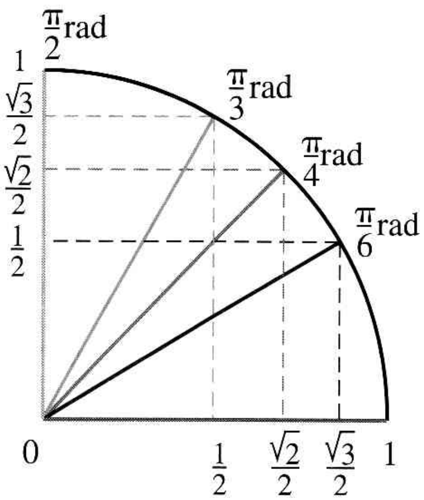




Visualisation des sinus et cosinus sur le cercle trigonométrique.
C'est un outil indispensable, qu'il est utile de bien visualiser afin d'être capable de retrouver rapidement les valeurs indiquées ci-dessous.



La connaissance du contenu du tableau ci-dessous est vraiment indispensable

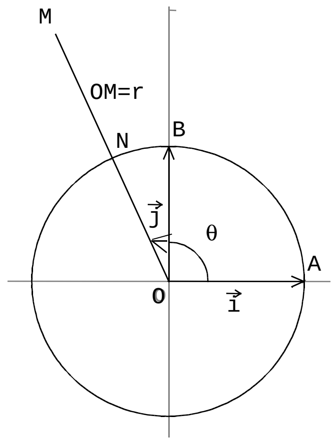


en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
en degrés	0	30	45	60	90
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Sinus et cosinus de l'angle orienté de deux vecteurs non nuls :

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, on désigne par $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ et $\sin(\vec{u}, \vec{v})$ le cosinus et le sinus d'une mesure quelconque de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.

<u>Coordonnées polaires d'un point du plan</u> :



Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
A tout point $M \neq O$, on associe les réels r et θ tels que :

$$r = OM$$
$$\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM}) + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

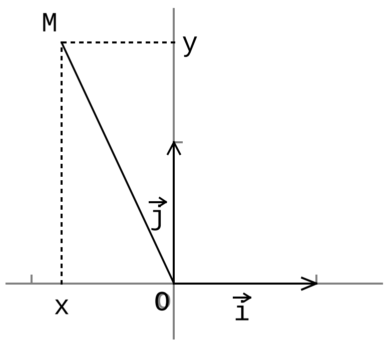
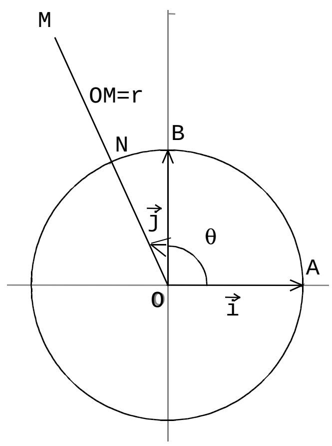
Soit N le point défini par: $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{ON}$. On a alors :
$\|\overrightarrow{OM}\| = |r| \times \|\overrightarrow{ON}\|$ avec $\|\overrightarrow{OM}\| = OM = r > 0$.
Donc : $OM = OM \times ON$. Donc $ON = 1$.
Ceci prouve que le point N est situé sur le cercle trigonométrique.

De plus, r étant un réel positif, $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont de même sens.
On a $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{i}, \overrightarrow{ON}) = \theta + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

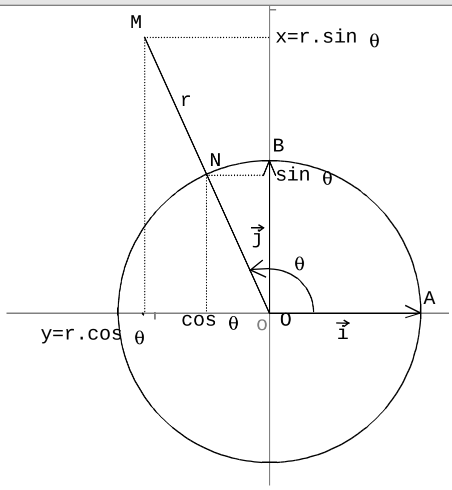
<u>Conclusion</u> :
Tout point M du plan ($M \neq O$) peut être repéré par un couple $(r ; \theta)$ où r est un réel strictement positif et θ un réel défini à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$).
r est la distance OM et θ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.
Tout couple **(*r* ; *θ*)** ainsi défini est appelé ***couple de coordonnées polaires de M***. On écrit : $M(r ; \theta)$.

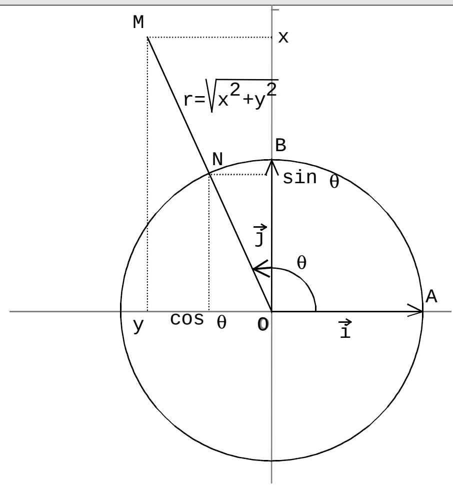
Remarque : Si l'on choisit pour θ la mesure principale de $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$, le couple $(r ; \theta)$ est alors unique.

<u>Coordonnées polaires et coordonnées cartésiennes d'un point du plan</u> :

Repérage par les coordonnées cartésiennes	**Repérage par les coordonnées polaires (*M* ≠ *O*)**
	
$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$ Le point *M* est repéré par la donnée du couple de ses **coordonnées cartésiennes *(x , y)***	$OM = r$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{i}, \overrightarrow{ON}) = \theta + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Le point M ($M \neq O$) est repéré par la donnée du couple de ses **coordonnées polaires *(r , θ)***

Liaison entre coordonnées cartésiennes et coordonnées polaires.

<table>
<tr><th>Coordonnées polaires $\rightarrow$ Coordonnées cartésiennes</th><th>Coordonnées cartésiennes $\rightarrow$ Coordonnées polaires</th></tr>
<tr><td>


Le point N a pour coordonnées cartésiennes : $(\cos\theta\,;\sin\theta)$.
Or $\overrightarrow{OM}=r\,\overrightarrow{ON}$.
donc M a pour coordonnées cartésiennes : $(r\cos\theta\,;r\sin\theta)$.
</td><td>


Le point M a pour coordonnées cartésiennes $(x\,;y)$.
donc $OM=r=\sqrt{x^2+y^2}$.
Donc : $\cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\sin\theta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
</td></tr>
<tr><td colspan="2">En résumé, si $M\,(x\,;y)$: coordonnées cartésiennes et $M\,(r\,;\theta)$: coordonnées polaires</td></tr>
<tr><td>$x=r\cos\theta$

$y=r\sin\theta$</td><td>r = $\sqrt{x^2+y^2}$
$\cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$
$\sin\theta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$</td></tr>
</table>

Par exemple :

1) Soit M tel $(\vec{i}\,,\overrightarrow{OM})=\dfrac{\pi}{3}$ et $OM=2$. Les coordonnées polaires de M sont : $M\left(2\,;\dfrac{\pi}{3}\right)$

Les coordonnées cartésiennes de M sont :

$$x=2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\times\frac{1}{2}=1 \qquad \text{et} \qquad y=2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\ \ \text{Donc } M\,(1\,;\sqrt{3})$$

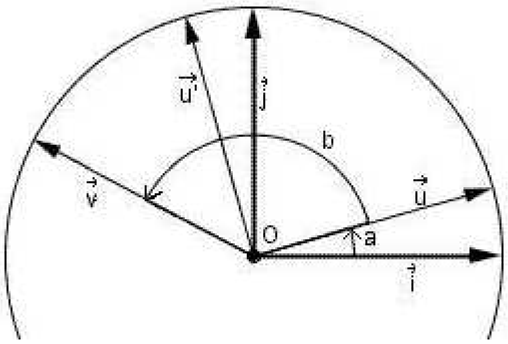
2) Soit N de coordonnées cartésiennes : $M\,(3\,;4)$.

On a : $OM^2=3^2+4^2=9+16=25$. Donc $OM=5$ et en notant $\theta=(\vec{i}\,,\overrightarrow{OM})+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$, on a :

$$\cos\theta=\frac{3}{5}\ ,\ \sin\theta=\frac{4}{5}\ \text{ et } \tan\theta=\frac{4}{3}.$$

La calculatrice donne : $\theta\approx 1{,}33$ rad $\approx 51{,}3\,°$.

Formules d'addition.



$(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ est un repère orthonormal direct.

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont trois vecteurs unitaires tels que :

$\vec{u}$ est tel que : $(\vec{i}\,,\vec{u})=a+2\,k_1\pi$ où $k_1\in\mathbb{Z}$.

$\vec{v}$ est tel que : $(\vec{u}\,,\vec{v})=b+2\,k_2\pi$ où $k_2\in\mathbb{Z}$.

$\overrightarrow{u'}$ est tel que : $(\vec{u}\,,\overrightarrow{u'})=\dfrac{\pi}{2}+2\,k_3\pi$ où $k_3\in\mathbb{Z}$.

Dans la base orthonormale directe $(\vec{i}\,;\vec{j})$, on a :

$(\vec{i}\,,\vec{u})=a+2\,k_1\pi$ où $k_1\in\mathbb{Z}$. Donc, par définition: $\vec{u}=\cos a\,\vec{i}+\sin a\,\vec{j}$

Dans la base orthonormale directe $(\vec{u}\,;\vec{u}\,')$, on a :

$(\vec{u}\,,\vec{v})=b+2\,k_2\pi$ où $k_2\in\mathbb{Z}$. Donc, par définition: $\vec{v}=\cos b\,\vec{u}+\sin b\,\overrightarrow{u'}$.

D'après la propriété de Chasles, on a :

$(\vec{i}\,;\vec{u}\,')=(\vec{i}\,;\vec{u})+(\vec{u}\,;\vec{u}\,')=a+\dfrac{\pi}{2}+2\,(k_1+k_2)\,\pi=a+\dfrac{\pi}{2}+2\mathrm{k}_4\,\pi$ où $k_4\in\mathbb{Z}$

Dans la base orthonormale directe $(\vec{i}\,;\vec{j})$, on a donc :

$(\vec{i}\,;\vec{u}\,')=a+\dfrac{\pi}{2}+2\mathrm{k}_4\,\pi$ où $k_4\in\mathbb{Z}$. Donc, par définition: $\overrightarrow{u'}=\cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)\vec{i}+\sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right)\vec{j}$.

Or $\cos\left(a+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin a$ et $\sin\left(a+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos a$. On en déduit donc que: $\overrightarrow{u'}=-\sin a\,\vec{i}+\cos a\,\vec{j}$.

Dans l'expression de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{u}\,;\vec{u}\,')$: $\vec{v}=\cos b\,\vec{u}+\sin b\,\overrightarrow{u'}$, remplaçons $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ par leurs expressions dans la base $(\vec{i}\,;\vec{j})$. Cela donne :

$\vec{v}=\cos b\,\vec{u}+\sin b\,\overrightarrow{u'}=\cos b\,(\cos a\,\vec{i}+\sin a\,\vec{j})+\sin b\,(-\sin a\,\vec{i}+\cos a\,\vec{j})$. C'est à dire :

$\vec{v}=(\cos b\cos a)\,\vec{i}+(\cos b\sin a)\,\vec{j}-(\sin b\sin a)\,\vec{i}+(\sin b\cos a)\,\vec{j}$. Ceci peut aussi s'écrire :

$\vec{v}=(\cos a\cos b-\sin a\sin b)\,\vec{i}+(\sin a\cos b+\cos a\sin b)\,\vec{j}$.

D'autre part, d'après la propriété de Chasles, on a aussi :

$(\vec{i}\,;\vec{v})=(\vec{i}\,;\vec{u})+(\vec{u}\,;\vec{v})=a+b+2\,(k_1+k_2)\,\pi=a+b\;2\mathrm{k}_5\,\pi$ où $k_5\in\mathbb{Z}$.

Dans la base orthonormale directe $(\vec{i}\,;\vec{j})$, on a donc :

$(\vec{i}\,;\vec{v})=a+b+2\mathrm{k}_5\,\pi$ où $k_5\in\mathbb{Z}$. Donc, par définition : $\vec{v}=\cos(a+b)\,\vec{i}+\sin(a+b)\,\vec{j}$.

On peut donc conclure que, pour tout $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$, on a :

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b \qquad \text{et} \qquad \sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$$

<u>Formules de soustraction</u>.

En écrivant que $a-b=a+(-b)$, et sachant que : $\cos(-x)=\cos x$ et $\sin(-x)=\sin x$, on obtient :
$\cos(a-b)=\cos[a+(-b)]=\cos a\cos(-b)-\sin a\sin(-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$.
$\sin(a-b)=\sin[a+(-b)]=\sin a\cos(-b)+\cos a\sin(-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$.
Conclusion :

$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b \quad \text{et} \quad \sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$$

<u>Formules de duplication</u>.
En écrivant $2a=a+a$, on peut alors appliquer les formules d'addition dans ce cas particulier. Cela donne :
$\cos(2a)=\cos(a+a)=\cos a\cos a-\sin a\sin a=\cos^2 a-\sin^2 a$.
Sachant que $\cos^2 a+\sin^2 a=1$, on peut aussi écrire :
$\cos 2a=2\cos^2 a-1$ ou $\cos 2a=1-2\sin^2 a$.

De même : $\sin(2a)=\sin(a+a)=\sin a\cos a+\cos a\sin a=2\sin a\cos a$.

<u>Résumé de toutes les formules de trigonométrie à connaître</u>.

Dans les formules ci-dessous, a et b sont deux réels quelconques.

<u>Périodicité</u> 2π

Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $\cos(a+2k\pi)=\cos a$
Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $\sin(a+2k\pi)=\sin a$

<u>Bornées</u>

$-1\leqslant\cos a\leqslant 1$ et $-1\leqslant\sin a\leqslant 1$

<u>Pythagore</u>

$\cos^2 a+\sin^2 a=1$

<u>Tangente</u>
Pour $a\neq\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$, $\tan a=\frac{\sin a}{\cos a}$

<u>symétrie d'axe</u> $(O\,;\vec{i})$

$\cos(-a)=\cos a$
$\sin(-a)=-\sin a$

<u>symétrie d'axe</u> $(O\,;\vec{j})$

$\cos(\pi-a)=-\cos a$
$\sin(\pi-a)=\sin a$

<u>symétrie de centre O</u>

$\cos(\pi+a)=-\cos a$
$\sin(\pi+a)=-\sin a$

<u>symétrie d'axe</u> $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}))$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\sin a$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\cos a$

<u>rotation d'angle</u> $\frac{\pi}{2}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=-\sin a$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=\cos a$

<u>Sommes et différences</u>

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$
$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$
$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$

<u>Double</u>

$\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a$

$\cos 2a=2\cos^2 a-1$

$\cos 2a=1-2\sin^2 a$

$\sin 2a=2\sin a\cos a$