Arithmétique élémentaire

L'arithmétique élémentaire s'intéresse aux problèmes qui concernent les nombres entiers.
Voir aussi les pages 12, 15 et 16 du livre.

Multiples et diviseurs :

Définitions :

Si $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$, on dit que a est un multiple de b lorsqu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que : $a = b \times q$.

Lorsque $b \neq 0$, l'égalité $a = b \times q$ peut aussi s'écrire : $\frac{a}{b} = q$.

Si $q \in \mathbb{N}$, on dit que b est un diviseur de a . On dit aussi que q est le quotient entier de a par b .

Exemples :

- Lorsque l'on écrit : $2 \times 3 = 6$ ou, ce qui est équivalent : $\frac{6}{3} = 2$ ou $\frac{6}{2} = 3$,

on peut dire que :

6 est un multiple de 3 mais aussi : 6 est un multiple de 2.
3 est un diviseur de 6 mais aussi : 2 est un diviseur de 6.

- Les diviseurs de 12 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12.

En effet, les seuls produits de 2 entiers naturels donnant 12 sont : $1 \times 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4 = 12$.

- Les multiples de 3 sont : 0 ; 3 ; 6 ; 9 ; 12 ; 15 ; …..

Il y en a une infinité. Ils sont de la forme : $3 \times q$ où $q \in \mathbb{N}$.

Remarques :

- 0 est un multiple de tous les entiers naturels.
- 1 est un diviseur de tous les entiers naturels.
- Tout entier est à la fois multiple et diviseur de lui-même.
- Les diviseurs d'un entier naturel n sont compris entre 1 et n : il y en a donc un nombre fini.
- Tout multiple non nul d'un entier naturel n est supérieur ou égal à n. Tout entier naturel possède une infinité de multiples.

Cas particuliers :

- Un entier pair est un multiple de 2. Il s'écrit sous la forme $2 \times q$ où $q \in \mathbb{N}$.
- Un entier impair est un entier qui n'est pas pair. Il s'écrit sous la forme $2 \times q + 1$ où $q \in \mathbb{N}$.

Critères de divisibilité :

- Un entier naturel est divisible par 2 lorsque son dernier chiffre est : 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8.
- Un entier naturel est divisible par 3 lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Un entier naturel est divisible par 5 lorsque son dernier chiffre est : 0 ou 5.

Nombres premiers :

Définition :

Un entier naturel est premier lorsqu' il possède exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemples :

0 n'est pas premier car il possède une infinité de diviseurs.
1 n'est pas premier car il possède un seul diviseur : 1.
2 est premier car ses seuls diviseurs sont : 1 et 2.
3 est premier car ses seuls diviseurs sont : 1 et 3.
4 n'est pas premier car il possède trois diviseurs : 1 ; 2 et 4.
5 est premier car ses seuls diviseurs sont : 1 et 5.
6 n'est pas premier car il possède quatre diviseurs : 1 ; 2 ; 3 et 6.
7 est premier car ses seuls diviseurs sont : 1 et 7.
8 n'est pas premier car il possède quatre diviseurs : 1 ; 2 ; 4 et 8.
9 n'est pas premier car il possède trois diviseurs : 1 ; 3 ; et 9.
10 n'est pas premier car il possède quatre diviseurs : 1 ; 2 ; 5 et 10.

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 :

Voir fiche polycopiée sur le crible d'Ératosthène.

Méthode pour savoir si un entier naturel n est premier :

On teste s'il est divisible par tous les nombres premiers dont le carré est inférieur à n.

Si aucun de ces nombres premiers ne divise n, alors n est premier.

Si l'un de ces nombre premier divise n, alors n n'est évidemment pas premier !

Par exemple :

743 est premier, car il n'est divisible, ni par 2, ni par 3 , ni par 5, ni par 7, ni par 11, ni par 13 ; ni par 17, ni par 19 et ni par 23. Il suffit de s'arrêter là car : $23^2 = 529 < 743$, mais $29^2 =841 > 743$.

323 n'est pas premier, car il est divisible par 17. En effet $323 = 17 \times 19$.

Décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers :

Propriété *(admise)* :

Tout entier naturel autre que 0 ou 1 est :

- Soit un nombre premier ,
- Soit un produit de facteurs premiers. (décomposition unique à l'ordre des facteurs près).

Exemple :

On peut trouver directement dans les cas simples :

$$600 = 6 \times 10 \times 10 = 2 \times 3 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 3 \times 5^2 .$$

On peut procéder systématiquement en utilisant la méthode suivante :

$$\begin{array}{r|l} 32760 & 2 \\ 16380 & 2 \\ 8190 & 2 \\ 4095 & 3 \\ 1365 & 3 \\ 455 & 5 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

Donc :

$32760 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$

PGCD et PPCM de deux entiers naturels :

Définitions :

Si $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$, alors :

- Parmi les diviseurs communs de a et de b, le plus grand est appelé le PGCD de a et de b.
- Parmi les multiples communs de a et de b, le plus petit (non nul) est appelé le PPCM de a et de b.

Exemple de recherche de PGCD :

1) Méthode directe : peu efficace si les entiers ont beaucoup de diviseurs.

Diviseurs de 24 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24.

Diviseurs de 30 : 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 10 ; 15 ; 30.

On voit bien que le plus grand diviseur commun est 6. Donc : PGCD (24 ; 30) = 6.

2) Algorithme d'Euclide (vu au collège) – Voir aussi livre page 15-2 :

$30 = 1 \times 24 + 6$ et $24 = 4 \times 6 + 0$.

Le dernier reste non nul est 6. Donc : PGCD (24 ; 30) = 6.

3) Utilisation de la décomposition en produit de nombres premiers :

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ et $30 = 2 \times 3 \times 5$.

On voit que 2×3 est le plus grand diviseur commun. Donc : PGCD (24 ; 30) = 6.

Exemple de recherche de PPCM :

1) Méthode directe : peu efficace car trop de calculs.
Multiples de 24 : 0 ; 24 ; 48 ; 72 ; 96 ; 120 ; 144 ; 168…………
Multiples de 30 : 0 ; 30 ; 60 ; 90 ; 120 ; 150 ; 180 ; 210………..
On voit bien que le plus petit multiple commun non nul est 120. Donc : PPCM (24 ; 30) = 120.

2) Utilisation de la décomposition en produit de nombres premiers :
$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ et $30 = 2 \times 3 \times 5$.
On voit que $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 120$ est le plus petit multiple commun non nul.
En effet : $120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 24 \times 5$ et $120= 2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 2 = 30 \times 4$
Donc : PPCM (24 ; 30) = 120.

Question : Pourquoi pas de PGCM et de PPCD ?

Remarques :
Les diviseurs communs de deux entiers sont les diviseurs de leur PGCD.
Les multiples communs de deux entiers sont les multiples de leur PPCM.
Le produit de deux entiers est égal au produit de leur PGCD par leur PPCM.

Entiers premiers entre eux (ou étrangers) :

Définition :
Si deux entiers a et b ont pour PGCD le nombre 1, on dit alors qu'ils sont premiers entre eux ou étrangers. Le nombre 1 est alors leur seul diviseur commun.

Exemples :
28 et 15 sont premiers entre eux.
En effet : $28 = 2^2 \times 7$ et $15 = 3 \times 5$ n'ont aucun diviseur premier commun.
Donc PGCD (28 ; 15) = 1.
Ceci peut être utilisé pour affirmer que la fraction $\frac{28}{15}$ est irréductible.

Applications aux calculs sur les fractions :

1) Comment rendre une fraction irréductible ?
Il suffit de diviser le numérateur et le dénominateur par le PGCD de ces entiers. Par exemple :

$$\frac{588}{630} = \frac{2^2 \times 3 \times 7^2}{2 \times 3^2 \times 5 \times 7} = \frac{\overbrace{2 \times 3 \times 7}^{PGCD} \times 2 \times 7}{\underbrace{2 \times 3 \times 7}_{PGCD} \times 3 \times 5} = \frac{2 \times 7}{3 \times 5} = \frac{14}{15}$$ fraction irréductible.

2) Dans une somme de deux fractions, comment choisir le plus petit dénominateur commun ?
Il suffit de prendre le PPCM des deux dénominateurs. Par exemple :
Calculons : $S = \frac{25}{882} + \frac{13}{168}$. On a : $882 = 2 \times 3^2 \times 7^2$ et $168 = 2^3 \times 3 \times 7$.
Donc : PPCM (882 ; 168) = $2^3 \times 3^2 \times 7^2 = 3528$.
Donc : $3528 = 882 \times 2^2 = 882 \times 4$ et $3528 = 168 \times 3 \times 7 = 168 \times 21$.
Donc : $S = \frac{25 \times 4}{882 \times 4} + \frac{13 \times 21}{168 \times 21} = \frac{100}{3528} + \frac{273}{3528} = \frac{373}{3528}$.

2) Comment trouver tous les diviseurs d'un entier ?
Voir la méthode du livre page 15-1