Propriétés comparées des égalités et inégalités dans $\mathbb{R}$

Dans les énoncés des propriétés ci-dessous, sauf précisions particulières, les lettres désignent des nombres réels quelconques.

Égalités	**Inégalités**
• L'égalité se lit dans les deux sens: elle est symétrique: $\boxed{a=b}$ **équivaut à:** $\boxed{b=a}$	• L'inégalité n'est pas symétrique, mais on a: $\boxed{a<b}$ **équivaut à:** $\boxed{b>a}$ $\boxed{a\leqslant b}$ **équivaut à:** $\boxed{b\geqslant a}$
•L'égalité est transitive: **Si** les deux égalités: $\boxed{a=b \text{ et } b=c}$ sont vraies **alors**, l'égalité $\boxed{a=c}$ est vraie On a alors trois écritures du même nombre. On se permet alors d'écrire: $a=b=c$	• L'inégalité est transitive: **Si** les deux égalités: $\boxed{a<b \text{ et } b<c}$ sont vraies **alors**, l'égalité $\boxed{a<c}$ est vraie On peut donc ordonner les trois nombres. On se permet alors d'écrire: $a<b<c$.
• L'égalité est compatible avec l'addition et la soustraction: $\boxed{a=b}$ **équivaut à:** $\boxed{a+c=b+c}$ $\boxed{a=b}$ **équivaut à:** $\boxed{a-c=b-c}$	• L'inégalité est compatible avec l'addition et la soustraction: $\boxed{a<b}$ **équivaut à:** $\boxed{a+c<b+c}$ $\boxed{a<b}$ **équivaut à:** $\boxed{a-c<b-c}$
• Égalité et opposés: $\boxed{a=b}$ **équivaut à:** $\boxed{(-a)=(-b)}$	• Inégalité et opposés: $\boxed{a<b}$ **équivaut à:** $\boxed{(-a)>(-b)}$
• L'égalité est compatible avec la multiplication par un réel non nul: $\boxed{a=b \text{ et } c\neq 0}$ **équivaut à:** $\boxed{ac=bc \text{ et } c\neq 0}$ Attention: Si $c=0$, on a $ac=bc$ sans forcément avoir $a=b$	• L'inégalité est compatible avec la multiplication par un réel strictement positif: $\boxed{a<b \text{ et } c>0}$ **équivaut à:** $\boxed{ac<bc \text{ et } c>0}$ Attention: Si $a<b$ avec $c=0$, on obtient: $ac=bc=0$ • Multiplication par un réel strictement négatif: $\boxed{a<b \text{ et } c<0}$ **équivaut à:** $\boxed{ac>bc \text{ et } c<0}$ **—>*<u>Changement de sens de l'inégalité</u>* <—**
• Égalité et inverses: $\boxed{a=b \text{ et } a\neq 0 \text{ et } b\neq 0}$ **équivaut à:** $\boxed{\frac{1}{a}=\frac{1}{b} \text{ et } a\neq 0 \text{ et } b\neq 0}$	• Inégalité et inverses de réels **strictement positifs**: $\boxed{0<a<b}$ **équivaut à:** $\boxed{0<\frac{1}{b}<\frac{1}{a}}$ **—>*<u>L'ordre est inversé!</u>***
• L'égalité est compatible avec la division par un réel non nul: $\boxed{a=b \text{ et } c\neq 0}$ **équivaut à :** $\boxed{\frac{a}{c}=\frac{b}{c} \text{ et } c\neq 0}$ Bien sûr, pas question de diviser par zéro!	• L'inégalité est compatible avec la division par un réel strictement positif: $\boxed{a<b \text{ et } c>0}$ **équivaut à:** $\boxed{\frac{a}{c}<\frac{b}{c} \text{ et } c>0}$ •Division par un réel strictement négatif: $\boxed{a<b \text{ et } c<0}$ **équivaut à:** $\boxed{\frac{a}{c}>\frac{b}{c} \text{ et } c<0}$ **—>*<u>Changement de sens de l'inégalité</u>* <—**

• Addition membre à membre d'égalités: **Si** $\boxed{a=b \text{ et } c=d}$ **alors** $\boxed{a+c=b+d}$ La réciproque est fausse	• Addition membre à membre d'inégalités: **Si** $\boxed{a<b \text{ et } c<d}$ **alors** $\boxed{a+c<b+d}$ La réciproque est fausse
• Soustraction membre à membre d'égalités: **Si** $\boxed{a=b \text{ et } c=d}$ **alors** $\boxed{a-c=b-d}$ La réciproque est fausse	Pour la soustraction, la propriété n'est plus vraie. En effet, si $a<b$ et $c<d$, on ne peut pas comparer $a-c$ et $b-d$. Cependant, sachant qu'alors $(-d)<(-c)$, on peut conclure que: $a-d<b-c$.
• Multiplication membre à membre: **Si** $\boxed{a=b \text{ et } c=d}$ **alors** $\boxed{ac=bd}$ La réciproque est fausse.	• Multiplication membre à membre d'inégalités de nombres **strictement positifs**: **Si** $\boxed{0<a<b \text{ et } 0<c<d}$ **alors** $\boxed{0<ac<bd}$ La réciproque est fausse.
• Division membre à membre: **Si** $\boxed{a=b \text{ et } c=d \text{ et } c\neq 0 \text{ et } d\neq 0}$ **alors:** $\boxed{\frac{a}{c}=\frac{b}{d}}$ La réciproque est fausse.	• Pas de propriété de division membre à membre, même pour les réels strictement positifs. En effet, si $0<a<b$ et $0<c<d$, on ne peut pas comparer $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{d}$. Cependant, sachant qu'alors $0<\frac{1}{d}<\frac{1}{c}$, on peut conclure que: $0<\frac{a}{d}<\frac{b}{c}$.