<u>Équations et ensembles de nombres</u>

Un problème qui se pose parfois est de savoir quel type de nombre est à rechercher comme solution d'équation ou d'inéquation. Précisons cela sur quelques exemples:

L'équation $x + 3 = 5$ possède la solution unique $x = 2$ qui appartient aux cinq ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.
L'équation $x + 3 = 2$ possède la solution unique $x = -1$ qui appartient aux quatre ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, mais pas à l'ensemble $\mathbb{N}$.
L'équation $2x = 10$ possède la solution unique $x = 5$ qui appartient aux cinq ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.
L'équation $2x = 9$ possède la solution unique $x = 4{,}5$ qui appartient aux trois ensembles $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, mais ni à l'ensemble $\mathbb{N}$,ni à l'ensemble $\mathbb{Z}$.
L'équation $3x = 1$ possède la solution unique $x = \frac{1}{3}$ qui appartient aux deux ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, mais pas aux ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{D}$.
L'équation $x^2 = 4$ possède la solution unique $x = 2$ dans l'ensemble $\mathbb{N}$, mais deux solutions $x =2$ ou $x = -2$ dans les ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.
L'équation $x^2 = 2$ possède deux solutions $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$ qui appartiennent à l'ensemble $\mathbb{R}$, mais à aucun des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$.
L'équation $x^2 = -1$ ne possède aucune solution dans chacun des cinq ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}$.

Les phénomènes apparus dans les divers exemples ci-dessus proviennent de la possibilité ou non de réaliser certaines opérations dans certains ensembles de nombres. En effet:

L'addition et la multiplication sont toujours possibles dans les cinq ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. En revanche, des problèmes se posent avec les soustractions et les divisions.
La soustraction n'est pas toujours possible dans $\mathbb{N}$: $1 - 2 \notin \mathbb{N}$ par exemple. En effet, la différence n'est pas positive lorsque le premier terme est inférieur au second, mais devient réalisable dans les ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ grâce à l'adjonction des nombres négatifs.
La division n'est pas toujours possible dans $\mathbb{N}$: $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$ par exemple. En effet, le quotient n'est pas entier lorsque le dividende n'est pas un multiple du diviseur. Le problème reste le même dans $\mathbb{Z}$**.**
La division n'est pas toujours possible dans $\mathbb{D}$: $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ par exemple. En effet, il existe des quotients non décimaux. La solution à ce problème de division n'est apporté qu'avec l'ensemble $\mathbb{Q}$ où toutes les divisions (sauf celle par zéro) sont possibles.

Il résulte de l'étude ci-dessus que:

•<u>L'addition et la multiplication</u> sont des opérations très sympathiques! On peut les réaliser partout! De plus, leurs propriétés sont simples:

$a + b = b + a$: changement possible de l'ordre des termes.

$a\,b = b\,a$: changement possible de l'ordre des facteurs.

$(a + b) + c = a + (b + c)$: tous les regroupements sont possibles, si bien que l'on écrit $a + b + c$

$(a\,b)\,c = a\,(b\,c)$: tous les regroupements sont possibles, si bien que l'on écrit abc

$a + 0 = 0 + a = a$: 0 est neutre pour l'addition des deux côtés.

$a \times 1 = 1 \times a = a$: 1 est neutre pour la multiplication des deux côtés.

Grâce à la création des nombres négatifs, dans les ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, tout nombre a possède un nombre opposé (-a) qui le neutralise dans l'addition: a + (–a) = 0.

Grâce à la création des nombres rationnels, dans les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, tout nombre a ≠ 0 possède un nombre inverse $\frac{1}{a}$ = a^{-1} qui le neutralise dans la multiplication: a × $\frac{1}{a}$ = 1.

a × (b + c) = (a × b) + (a × c) : propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition, qui relie ces deux opérations.

Cette propriété, peut s'écrire plus simplement sous la forme: a (b + c) = a b + a c en utilisant les conventions d'écriture des produits et les règles de priorité.

- <u>La soustraction et la division</u> ne présentent pas les mêmes avantages, hélas!

La soustraction n'est pas toujours possible dans l'ensemble $\mathbb{N}$ où il manque les nombres négatifs.

La division n'est pas toujours possible dans les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{D}$ où il manque les rationnels non décimaux!

a – b et b – a ne sont pas égaux, mais opposés.

$\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{a}$ ne sont pas égaux, mais inverses.

(a – b) – c ≠ a – (b – c) car : (a – b)–c = a – (b + c) et a – (b – c) = (a – b) + c.

$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} \neq \frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)}$ car : $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{b\times c}$ et $\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = \frac{a\times c}{b}$.

a – 0 = a mais 0 – a = (–a) ≠ a : 0 n'est neutre que d'un côté.

$\frac{a}{1}$ = a mais $\frac{1}{a}$ ≠ a: 1 n'est neutre que d'un côté.

On a cependant la distributivité de la multiplication sur la soustraction et la distributivité de la division sur l'addition et la soustraction. Écrivez ci-dessous ces propriétés :

- A titre de réflexion, je vous laisse voir ce que peut donner <u>l'exponentiation</u>.