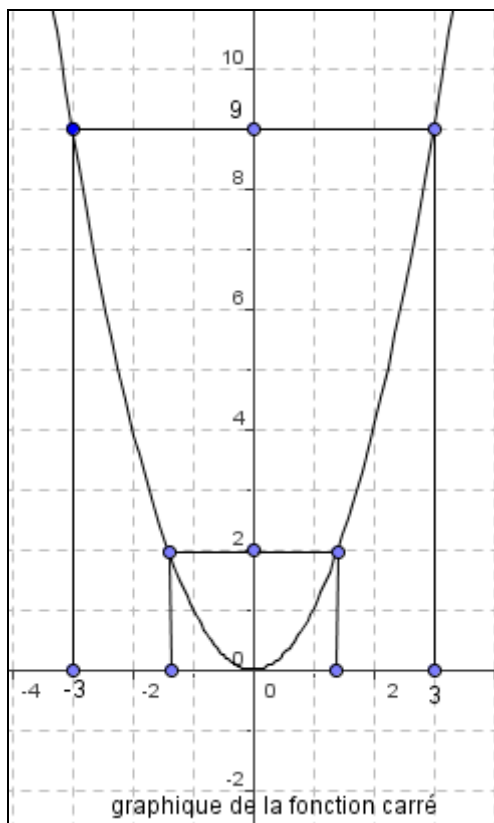


Rappels et compléments sur les racines carrées



Propriété et définition :

Tout réel positif a est le carré de deux nombres opposés. Celui qui est positif est appelé la racine carrée de a .

Exemples :

- 9 est le carré de 3 et de (-3) , c'est à dire :

$$3^2 = (-3)^2 = 9.$$

Comme $3 > 0$, on a : $\sqrt{9} = 3$ et donc :

$$-3 = -\sqrt{9} \text{ car } (-3) < 0.$$

- 2 est le carré de $\sqrt{2}$ et de $-\sqrt{2}$, c'est à dire :

$$(\sqrt{2})^2 = (-\sqrt{2})^2 = 2.$$

On a : $\sqrt{2} > 0$ et donc : $-\sqrt{2} < 0$.

- 0 est le carré d'un seul nombre : 0.

On a : $\sqrt{0} = 0$.

- Les nombres strictement négatifs ne sont pas des carrés de réels.

Par exemple, il est impossible de trouver un réel a tel que $a^2 = -1$.

L'écriture $\sqrt{-1}$ est donc insensée...

Résumé :

Le radical \sqrt{x} existe seulement lorsque $x \geq 0$.

Lorsque \sqrt{x} existe, on a : $\sqrt{x} \geq 0$.

Lorsque $x \geq 0$ et $y \geq 0$, on a : $y = \sqrt{x}$ qui est équivalent à : $x = y^2$.

Conséquences de la définition :

Si $x \geq 0$, alors $(\sqrt{x})^2 = x$.

Si $x \geq 0$, alors $\sqrt{x^2} = x$... mais : Si $x < 0$, alors : $\sqrt{x^2} = (-x)$

Ceci peut s'écrire en une seule phrase : $\sqrt{x^2} = |x|$ où le symbole $|x|$ désigne la valeur absolue de x .

Exemples :

- $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$ et $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = -(-3)$. On a : $\sqrt{3^2} = \sqrt{(-3)^2} = 3$

- On a : $(\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$. Donc : $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$ car $\sqrt{2} - 1 > 0$.

On a : $(1 - \sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{2}$. Donc : $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = -(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$ car $1 - \sqrt{2} < 0$.

C'est à dire : $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = \sqrt{2} - 1$

Propriétés de calcul sur les radicaux :

Si $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}^+$ alors :

- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ et si $b \neq 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

- mais attention : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. idem pour la soustraction.

Par exemple : $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$.

$$\sqrt{18} - \sqrt{8} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2} \neq \sqrt{10}.$$