Équations de droites dans un repère du plan

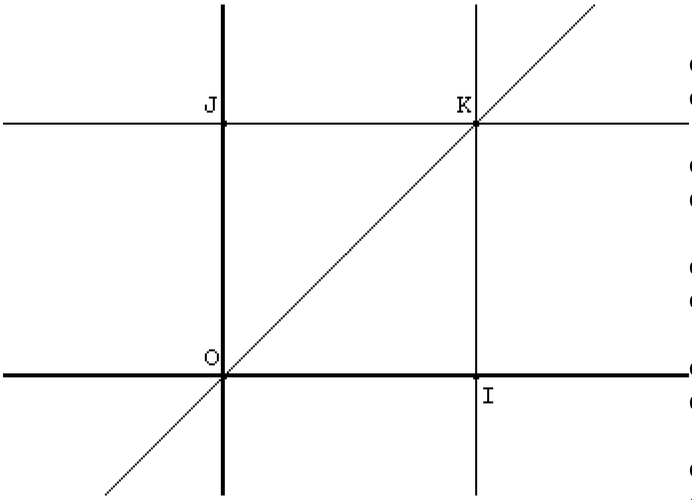
On se place dans le plan muni d'un repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

Définition

Une équation de droite (ou de courbe) est une égalité vérifiée par les coordonnées $(x\ ;y)$ de tous les points de la droite (ou de la courbe).

Exemples:

Sur le dessin ci-dessous, on a: $I\ (1\ ;0)$ $J\ (0\ ;1)$ $K\ (1\ ;1)$



La droite *(JK)* a pour équation: $y=1$
car tous les point de *(JK)* ont une ordonnée constante égale à 1 et une abscisse quelconque.

La droite *(IK)* a pour équation: $x=1$
car tous les point de *(IK)* ont une abscisse constante égale à 1 et une ordonnée quelconque.

La droite *(OI)* a pour équation: $y=0$
car tous les point de *(OI)* ont une ordonnée constante égale à 0 et une abscisse quelconque.

La droite *(OJ)* a pour équation: $x=0$
car tous les point de *(OI)* ont une abscisse constante égale à 0 et une ordonnée quelconque.

La droite *(OK)* a pour équation: $y=x$
car tous les point de *(OK)* ont une abscisse et une ordonnée égales.

Propriétés

Les propriétés suivantes ont été démontrées en classe.

Premier cas: la droite $\mathscr{D}$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.

Une droite $\mathscr{D}$ qui n'est **pas parallèle à l'axe des ordonnées** a une équation de la forme:
$y=mx+p$ où *m* et *p* sont deux réels.

$\mathscr{D}$ est alors la représentation graphique de la fonction affine *f* définie sur $\mathbb{R}$ par: $f\ (x)=mx+p$ où *x* est un nombre réel variable appelé: *variable x* et le réel *f(x)* est appelé: *image de x par la fonction f.*

Le nombre *m* est le *coefficient directeur* de $\mathscr{D}$.

Si $\vec{V}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un *vecteur directeur* de $\mathscr{D}$, alors on a: $m=\dfrac{b}{a}$.

Si $\mathscr{D}$ est déterminée par deux points $A\ (x_A\ ;\ y_A)$ et $B\ (x_B\ ;\ y_B)$, alors, on a: $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$.

La différence des ordonnées de deux points quelconques de $\mathscr{D}$ est proportionnelle à la différences de leurs abscisses. Le coefficient de proportionnalité est le coefficient directeur de la droite $\mathscr{D}$.

Un vecteur directeur $\vec{U}$ de $\mathscr{D}$ facile à retenir est : $\vec{U}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ car $\dfrac{m}{1}=m$.

Le nombre *p* est *l'ordonnée à l'origine* de $\mathscr{D}$: c'est l'ordonnée du point d'intersection de $\mathscr{D}$ avec l'axe des ordonnées. $\mathscr{D}$ passe donc par le point $C\ (0\ ;\ p)$.

Lorsque $m\neq 0$, le nombre $-\dfrac{p}{m}$ est *l'abscisse à l'origine* de $\mathscr{D}$: c'est l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{D}$ avec l'axe des abscisses. $\mathscr{D}$ passe alors par le point $D\left(-\dfrac{p}{m}\ ;0\right)$.

Cas particuliers:

Lorsque le coefficient directeur $m=0$, la droite $\mathscr{D}$ a pour équation : $y=p$.
$\mathscr{D}$ est alors parallèle à l'axe des abscisses.
$\mathscr{D}$ est ici la représentation graphique de la *fonction constante f* définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x)=p$

Lorsque l'ordonnée à l'origine $p=0$, la droite $\mathscr{D}$ a pour équation : $y=mx$.
$\mathscr{D}$ passe alors par l'origine O du repère.
$\mathscr{D}$ est ici la représentation graphique de la *fonction linéaire f* définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x)=mx$

Lorsque le coefficient directeur $m=0$ et l'ordonnée à l'origine $p=0$, la droite $\mathscr{D}$ a pour équation : $y=0$.
$\mathscr{D}$ est alors à l'axe des abscisses.
$\mathscr{D}$ est ici la représentation graphique de la *fonction constante nulle f* définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x)=0$

<u>Deuxième cas</u>: la droite $\mathscr{D}$ est parallèle à l'axe des ordonnées.

Une droite $\mathscr{D}$ qui est **parallèle à l'axe des ordonnées** a une équation de la forme:
$x=q$ où *q* est un réel.

On verra bientôt que $\mathscr{D}$ ne peut pas être la représentation graphique d'une fonction.
$\mathscr{D}$ ne possède ni coefficient directeur, ni ordonnée à l'origine.
Le nombre q est *l'abscisse à l'origine* de $\mathscr{D}$: c'est l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{D}$ avec l'axe des abscisses. $\mathscr{D}$ passe donc par le point $E(q;0)$.
Un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ facile à retenir est : $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Cas particulier:

Lorsque $q=0$, la droite $\mathscr{D}$ a pour équation : $x=0$.
$\mathscr{D}$ est alors à l'axe des ordonnées.

Droites parallèles

Deux droites sont parallèles lorsqu'elles ont le même coefficient directeur ou sont toutes les deux parallèles à l'axe des ordonnées.

Droites perpendiculaires

Les droites d'équations $y=m_1x+p_1$ et $y=m_2x+p_2$ sont perpendiculaires si et seulement si $m_1m_2=-1$.

Coordonnées du point d'intersection de deux droites sécantes

Les coordonnées $(x;y)$ du point d'intersection I de deux droites sécantes vérifient les équations de ces deux droites. Pour calculer ces coordonnées, il suffit de résoudre le système:

$$\begin{cases} y = m_1x + p_1 \\ y = m_2x + p_2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = mx + p \\ x = q \end{cases} \quad \text{selon la situation.}$$