Mathématiques.

Mardi 6 janvier 2007 - Devoir commun à toutes des classes de seconde - Durée : deux heures.
Le barème probable est indiqué pour chacun des exercices.

Exercice 1 : QCM *(3 points)*
Pour chaque question, une seule proposition est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Les nombres a et b sont des entiers non nuls.

Chaque réponse exacte rapporte 0,5 *point. Chaque réponse fausse enlève* 0,25 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.*
Aucune justification n'est demandée.

	Questions	**Réponse A**	**Réponse B**	**Réponse C**	**Réponse D**
1	$\sqrt{63}-\sqrt{28}$ est égal à	$\sqrt{35}$	$7\sqrt{3}-2\sqrt{7}$	$5\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$
2	$\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ est égal à	-1	$2\sqrt{2}-3$	$2+\sqrt{2}$	$3-2\sqrt{2}$
3	a^3b^6 est le cube de	$-ab^2$	$(-a)\times(-b)^2$	$(-a)\times(-b^2)$	$a\times(-b^2)$
4	$(2a^2)^3\times a^5$ est égal à	$6a^{11}$	$6a^{10}$	$8a^{11}$	$8a^{30}$
5	$-a^{-3}$ est égal à	$3a$	$\dfrac{1}{a^3}$	a^3	$-\dfrac{1}{a^3}$
6	La décomposition en produit de facteurs premiers de $49^{100}\times63^{50}$ est	$3^{100}\times7^{250}$	$3^{52}\times7^{152}$	$3^{52}\times7^{201}$	$3^{2}\times7^{152}$

Exercice 2 : *(5 points)*
ABCD est un rectangle de centre *O*, de côtés $AB = L$ et $BC = l$, où *L* et *l* sont deux nombres réels strictement positifs tels que $L > l$.

1°) Faire une figure.
2°) Construire le point *I*, milieu de $[AB]$ et le point *K*, intersection de (DI) et (CA).
3°) Démontrer que (BK) coupe $[AD]$ en son milieu.
4°) Prouver que $AK = \dfrac{1}{3}\sqrt{L^2+l^2}$ et que $DK = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{L^2}{4}+l^2}$.
5°) Démontrer que si *ADK* est rectangle en *K*, alors $\dfrac{L}{l} = \sqrt{2}$.
6°) Le rectangle *ABCD* est supposé construit avec les dimensions d'une feuille de format A4, c'est à dire 21 cm $\times$ 29,7 cm.
Dans ces conditions, le triangle *ADK* est-il rectangle en *K* ? Justifiez votre réponse.

<u>Exercice 3</u> : *(2 points)*

1. Soit x un nombre réel différent de 1 et de -1. Montrer que $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2}{x^2-1}$.
2. Appliquer la formule précédente pour trouver l'écriture irréductible de $\dfrac{2}{2^2-1}+\dfrac{2}{4^2-1}+\dfrac{2}{6^2-1}+\dfrac{2}{8^2-1}+\dfrac{2}{10^2-1}$.

<u>Exercice 4</u> : *(4,5 points)*
NB : les questions 1), 2) et 3) de cet exercice sont indépendantes.

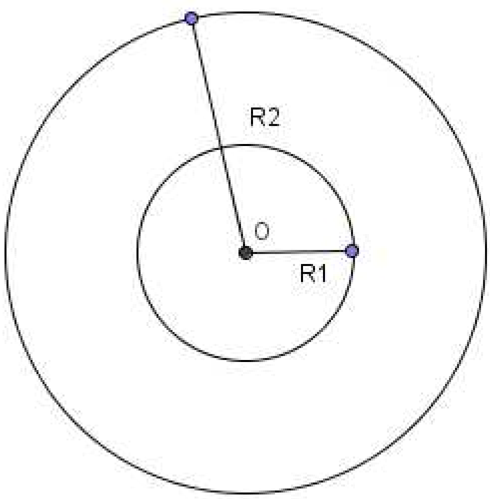
1)
a) Sans recourir aux valeurs approchées, comparer les réels : A = $2\sqrt{3}$ et B = $3\sqrt{2}$
b) En déduire l'ordre de classement des réels $\dfrac{1}{A}$ et $\dfrac{1}{B}$.
c) Écrire | A – B | et $\left|\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right|$ sans utiliser les barres de valeur absolue. Justifier.

2) Résoudre l'équation et l'inéquation suivantes . Pour l'inéquation, donner l'ensemble des solutions sous forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles.

a) | x – 9 | = 2.

b) | x + 5 | > 4.

3)



Le dessin ci-contre représente deux cercles concentriques de centre O (*le dessin n'est pas à l'échelle*).

Le plus grand cercle a pour rayon R_2 = 4 cm.

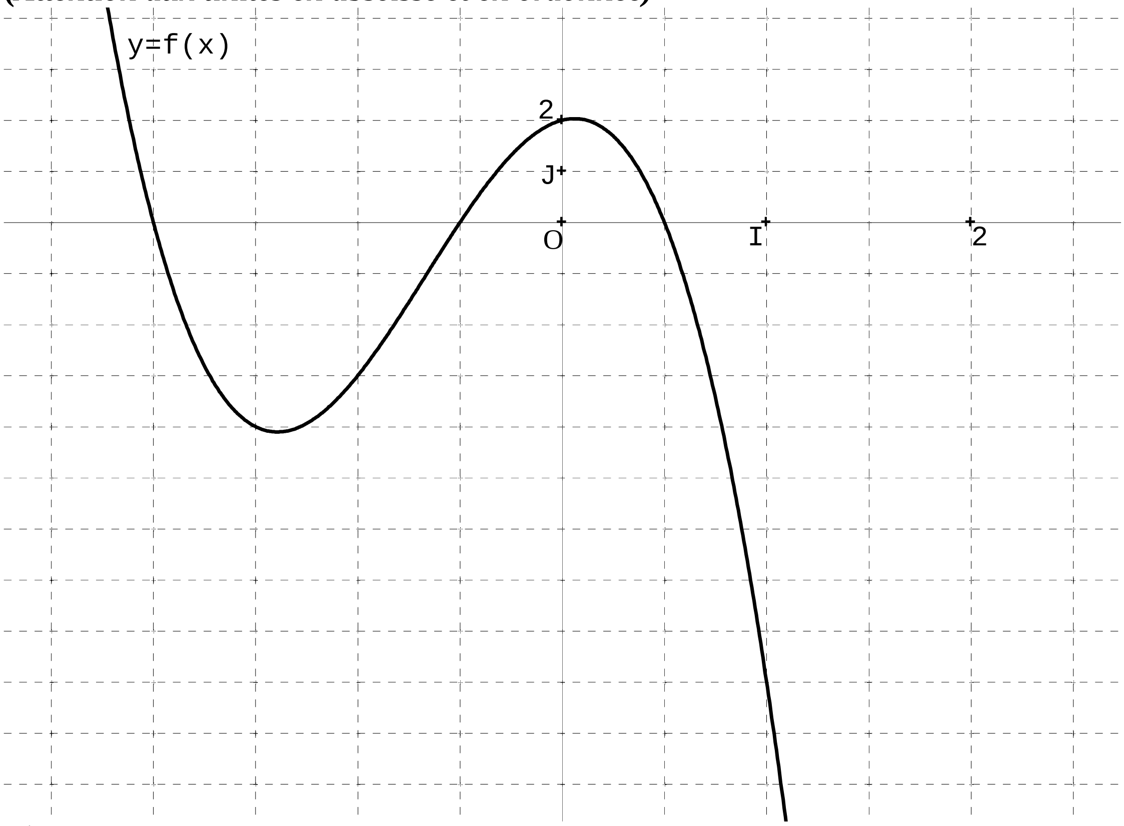
Le plus petit possède un rayon R_1 inconnu, mais on sait que l'aire du disque de rayon R_1 est comprise entre 10 cm^2 et 10,2 cm^2 .

On utilisera l'encadrement de π : $3,1 \leqslant \pi \leqslant 3,2$.

En utilisant ces données :
a) Déterminer un encadrement de l'aire du disque de rayon R_2 .
b) En déduire un encadrement de l'aire de la couronne circulaire délimitée par les deux cercles concentriques de rayons R_1 et R_2.

Exercice 5 : *(5,5 points)*

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ ci-dessous est la représentation graphique dans un repère orthogonal *(O ;I ;J)* d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$
(Attention aux unités en abscisse et en ordonnée)



A) Lecture Graphique

1) Déterminer graphiquement :
   a) l'image de -1 par f et l'image de 0 par f.
   b) le(s) antécédent(s) éventuel(s) de 0 par f.
   c) le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$.

2) Résoudre graphiquement :
   a) l'inéquation $f(x) < 0$.
   b) l'inéquation $f(x) \geqslant -9$.
   c) Recopier et compléter en donnant l'encadrement le plus précis par des nombres entiers :
      Si $-2 \leqslant x \leqslant -1$ alors ……. $\leqslant f(x) \leqslant$ ………

B) Calculs

On précise que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)(1-4x^2)$.

1) Le point A de coordonnées $A(-3\ ;\ 35)$ (*non visible sur la figure*) est-il situé sur la courbe $(\mathcal{C}_f)$?
2) Donner la forme développée de $f(x)$.
3) Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = 0$, puis l'équation $f(x) = 2 - 4x^3$
4) Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x) < 0$.