Méthodes de résolution des équations et inéquations à une inconnue

Préambule

Les équations et les inéquations traitées ici étant à une inconnue (notée x), il sera toujours possible de mettre en évidence une fonction f telle que l'équation s'écrive sous la forme $f(x)=0$ et l'inéquation sous l'une des formes: $f(x)<0$, $f(x)\leqslant 0$, $f(x)>0$ ou $f(x)\geqslant 0$. Les problèmes du type $f(x)\neq 0$ peuvent être résolus en traitant l'équation $f(x)=0$.

Degré d'une équation ou d'une inéquation

C'est le plus grand exposant de x dans $f(x)$ lorsque l'équation ou l'inéquation d'inconnue x est mise sous la forme donnée dans le préambule.

Exemples:

L'équation $(2x-1)^2=(x-1)^2$ est du second degré car elle s'écrit: $3x^2-2x=0$.
L'inéquation $(x+2)^2>(x-1)^2$ est du premier degré car elle s'écrit: $6x+3>0$.

Résolution graphique

Dans un repère du plan, on trace la représentation graphique $\mathscr{C}$ de la fonction f définie au préambule.

Les solutions de l'équation $f(x)=0$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

Les solutions de l'inéquation $f(x)>0$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}$ dont l'ordonnée est positive.
Les solutions de l'inéquation $f(x)<0$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}$ dont l'ordonnée est négative.

Premier degré

Les méthodes de résolution sont connues depuis le collège. On traite ici le cas général.

L'équation s'écrit: $ax+b=0$ ce qui équivaut à $ax=-b$.
Si $a\neq 0$, l'équation a une solution $x=-\dfrac{b}{a}$.
Si $a=0$ et $b\neq 0$, l'équation n'a pas de solution.
Si $a=0$ et $b=0$, tous les réels sont solutions.

L'inéquation s'écrit: $ax+b>0$ ce qui équivaut à $ax>-b$
Si $a>0$, on a: $x>-\dfrac{b}{a}$ et donc: $x\in\left]-\dfrac{b}{a};+\infty\right[$
Si $a<0$, on a: $x<-\dfrac{b}{a}$ et donc: $x\in\left]-\infty;-\dfrac{b}{a}\right[$
Si $a=0$ et $b\leqslant 0$, il n'y a pas de solution.
Si $a=0$ et $b>0$, tous les réels sont solutions.

On retiendra comme conséquence de cette étude, les tableaux de signes:

$a>0$	x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
	$ax+b$		$-$	0	$+$	

$a<0$	x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
	$ax+b$		$+$	0	$-$	

Degré supérieur à 1

Une résolution graphique est possible grâce à la calculatrice. Elle est même conseillée lorsque vous n'êtes pas trop sûrs de vos calculs. En effet, cela vous permet d'avoir une information préalable sur les solutions du problème posé, même si le graphique ne donne souvent que des solutions approchées.

Pour résoudre cela par le calcul, il faut:

1. Écrire l'équation sous la forme $f(x)=0$.
2. **Factoriser** $f(x)$ pour obtenir des facteurs du premier degré.
3. Déterminer les réels qui annulent chacun des facteurs du premier degré.
4. Utiliser la propriété: Un produit de facteurs est nul lorsque l'un des facteurs est nul.

1. Écrire l'inéquation sous l'une des formes: $f(x)<0$, $f(x)\leqslant 0$, $f(x)>0$ ou $f(x)\geqslant 0$.
2. **Factoriser** $f(x)$ pour obtenir des facteurs du premier degré.
3. Étudier le signe de chacun des facteurs du premier degré en utilisant par exemple les tableaux de signes de la page précédente.
4. Utiliser la règle du signe du produit. Utiliser un tableau de signes est souvent efficace pour conclure.

Quotients avec présence de l'inconnue au dénominateur

Avant tout calcul, il faut se demander pour quelles valeurs de l'inconnue il est effectivement réalisable. En effet, la division par zéro n'est pas possible.
Après avoir mis l'équation sous la forme préconisée au préambule, il suffit de rechercher l'ensemble de définition de la fonction f.

Ici aussi, une résolution graphique est possible grâce à la calculatrice.
Elle conseillée pour les mêmes raisons que précédemment et de plus, ceci vous permet aussi de vérifier l'exactitude de l'ensemble de définition de f.

Ici aussi, il faut **factoriser** $f(x)$, c'est à dire obtenir la forme $f(x)=\frac{N(x)}{D(x)}$ où $N(x)$ et $D(x)$ sont des produits de facteurs du premier degré.

L'équation $\frac{N(x)}{D(x)}=0$ équivaut à $N(x)=0$ et $D(x)\neq 0$
Pour résoudre $N(x)=0$, il suffit d'utiliser les méthodes précédentes.

Enfin, parmi les solutions de l'équation $N(x)=0$, éliminer celles qui annulent $D(x)$ car ces réels ne peuvent être solution de l'équation.

Pour résoudre l'inéquation $\frac{N(x)}{D(x)}>0$, il faut déterminer les signes des facteurs du premier degré qui composent $N(x)$ et $D(x)$.
Un tableau de signes permettra de conclure car la règle des signes est la même pour le quotient que pour le produit.
Prendre cependant garde aux réels qui annulent $D(x)$, car ils doivent être exclus de l'ensemble des solutions: l'utilisation de la double barre dans le tableau de signes permet d'éviter un tel oubli.

Étude de quelques exemples

Exemple 1

Résolution de l'équation $x^3 = x$ et des inéquations $x^3 < x$ et $x^3 > x$.
Elles se mettent sous la forme: $f(x) = 0$, $f(x) < 0$ et $f(x) > 0$ avec $f(x) = x^3 - x$.

Factorisons $f(x)$. On a: $f(x) = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$.

Étudions le signe de chaque facteur:
Le facteur x est nul pour $x = 0$, il est positif lorsque $x > 0$ et négatif lorsque $x < 0$.
Le facteur $(x-1)$ est nul pour $x = 1$, il est positif lorsque $x > 1$ et négatif lorsque $x < 1$.
Le facteur $(x+1)$ est nul pour $x = -1$, il est positif lorsque $x > -1$ et négatif lorsque $x < -1$.

On peut donc obtenir le tableau de signes:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x(x-1)(x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

La lecture du tableau nous permet de répondre aux questions posées:

- L'équation $x^3 = x$ a pour ensemble de solutions: $S = \{-1\,;0\,;1\}$.
- L'inéquation $x^3 < x$ a pour ensemble de solutions: $S =]-\infty\,;-1[\,\cup\,]0\,;1[$.
- L'inéquation $x^3 > x$ a pour ensemble de solutions: $S =]-1\,;0[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.

Exemple 2

Résolution de l'équation $\frac{2x-1}{x^2-1} = 1$ et des inéquations $\frac{2x-1}{x^2-1} < 1$; $\frac{2x-1}{x^2-1} \leqslant 1$; $\frac{2x-1}{x^2-1} > 1$ et $\frac{2x-1}{x^2-1} \geqslant 1$.

Elles se mettent sous la forme: $f(x) = 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \leqslant 0$, $f(x) > 0$ et $f(x) \geqslant 0$ avec $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-1} - 1$

Cherchons les ensembles de définition de cette équation et de ces inéquations: c'est l'ensemble de définition de la fonction f, c'est à dire l'ensemble de tous les réels tels que $x^2 - 1 \neq 0$ car il est impossible de diviser par zéro.
On a $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Donc: $x^2 - 1 \neq 0$ est équivalent à: $x \neq 1$ et $x \neq -1$.

Les solutions 5 problèmes ci-dessus sont donc à chercher dans l'ensemble de définition de la fonction f qui est: $\mathbb{R} - \{-1\,;1\}$.

Factorisons $f(x)$: $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-1}-1=\dfrac{2x-1-\left(x^2-1\right)}{x^2-1}=\dfrac{2x-x^2}{x^2-1}=\dfrac{x(2-x)}{(x-1)(x+1)}$.

Étudions le signe de chaque facteur:

Le facteur x est nul pour $x=0$, il est positif lorsque $x>0$ et négatif lorsque $x<0$.
Le facteur $(2-x)$ est nul pour $x=2$, il est positif lorsque $x<2$ et négatif lorsque $x>2$.
Le facteur $(x-1)$ est nul pour $x=1$, il est positif lorsque $x>1$ et négatif lorsque $x<1$.
Le facteur $(x+1)$ est nul pour $x=-1$, il est positif lorsque $x>-1$ et négatif lorsque $x<-1$.

On peut donc obtenir le tableau de signes:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{x(2-x)}{(x-1)(x+1)}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

La lecture du tableau nous permet de répondre aux questions posées:

- L'équation $\dfrac{2x-1}{x^2-1}=1$ a pour ensemble de solutions: $S=\{0\,;2\}$.
- L'inéquation $\dfrac{2x-1}{x^2-1}<1$ a pour ensemble de solutions: $S=]-\infty\,;-1[\cup]0\,;1[\cup]2\,;+\infty[$.
- L'inéquation $\dfrac{2x-1}{x^2-1}\leqslant 1$ a pour ensemble de solutions: $S=]-\infty\,;-1[\cup[0\,;1[\cup[2\,;+\infty[$.
- L'inéquation $\dfrac{2x-1}{x^2-1}>1$ a pour ensemble de solutions: $S=]-1\,;0[\cup]1\,;2[$.
- L'inéquation $\dfrac{2x-1}{x^2-1}\geqslant 1$ a pour ensemble de solutions: $S=]-1\,;0]\cup]1\,;2]$.