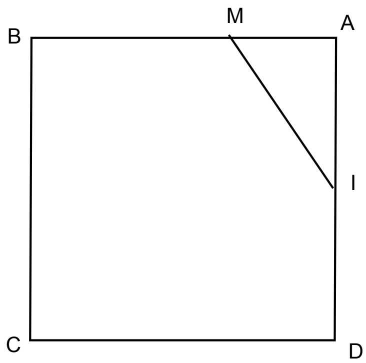
Exercices d'introduction à la notion de fonction

Exercice n° 1:



ABCD est un carré de 2 cm de côté (le dessin ci-contre n'est pas aux bonnes dimensions). I est le milieu du segment [AD].

Un point M part de I et tourne autour du carré en passant par les points A, B, C et D pour revenir au point I après un tour complet.

On appelle x la distance (en cm) parcourue par M lorsqu'il se déplace depuis I.

On note $\mathcal{A}(x)$, l'aire (en cm^2) de la zone délimitée par les parties des côtés du carré déjà parcourues et le segment [IM].
Sur l'exemple tracé ci-dessus, x = IA + AM et l'aire $\mathcal{A}(x)$ correspond à l'aire du triangle IAM.

Le but du problème est d'étudier les variations de $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x, d'en faire une représentation graphique et de répondre graphiquement et par le calcul à quelques questions concernant les variations de cette aire $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x.

1) En supposant que le point s'arrête après un tour complet, dire à quel intervalle appartient le réel x. Cet intervalle sera appelé : "ensemble de définition de la fonction $\mathcal{A}$".

2) Compléter le tableau de quelques valeurs de $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathcal{A}(x)$									

3) En complétant le tableau ci-dessus, vous avez vu que la formule de calcul de l'aire $\mathcal{A}(x)$ dépend de l'emplacement du point M sur les segments consécutifs: [IA], [AB], [BC], [CD] et [DI].

Déterminer, en fonction du nombre x pris entre 0 et 8, les formules générales de calcul de $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x.

4) En prenant 2 cm pour unité graphique, représenter graphiquement les variations de la fonction $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x.

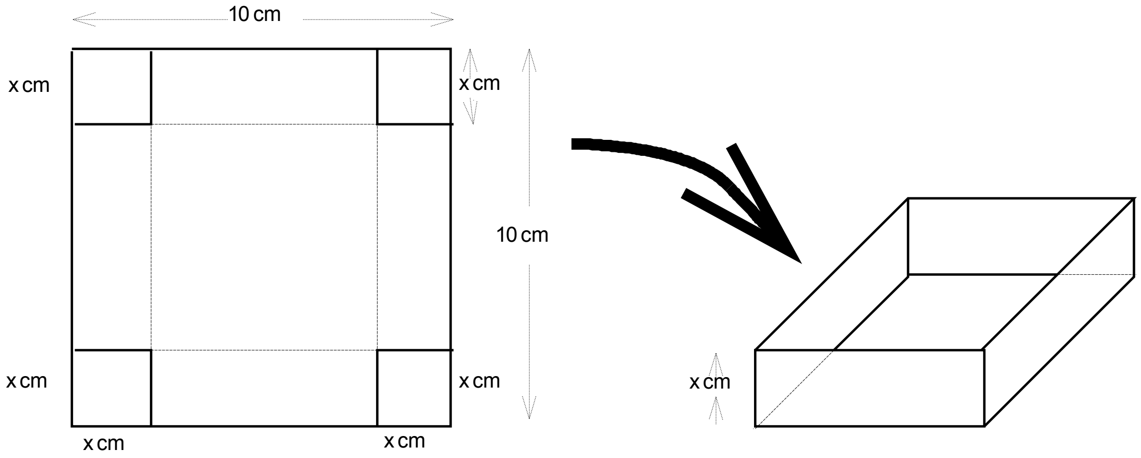
5) Déterminer par lecture graphique, puis confirmer par un calcul, les réponses aux questions:

a) Quelle est l'aire $\mathcal{A}(x)$ correspondant à un déplacement de M de 6,8 cm ?

b) Quelle est la distance x parcourue par M lorsque l'aire $\mathcal{A}(x)$ est aux deux tiers de l'aire totale du carré ?

Exercice n° 2:

On découpe les quatre coins d'une plaque métallique carrée de 10 cm de côté et on remonte les bords afin d'obtenir une boîte sans couvercle à base carrée, comme schématisé ci-dessous:



1) Dans quel intervalle doit-on prendre le nombre x pour que la construction soit possible? Justifiez votre réponse.
2) Exprimer en fonction de x, le volume V(x), en cm^3, de la boîte sans couvercle ainsi réalisée.
3) Programmer sur votre calculatrice graphique la fonction y = V(x).

Observer le graphique obtenu.

Régler un bon cadrage de la partie de la courbe qui nous intéresse ici.

Évaluer graphiquement le maximum de la fonction V. Pour quelle valeur de x est-il obtenu ?

Quelle précision peut-on attendre de la lecture graphique précédente ? Quels moyens la calculatrice offre-t-elle à son utilisateur pour affiner sa réponse et si possible offrir une valeur exacte.

Comment peut-on vérifier que la solution obtenue n'est qu'approchée ou bien que la réponse trouvée est bien exacte ?

Utiliser la table des valeurs: Régler la valeur initiale et le pas (incrémentation). S'entraîner à lire des valeurs précises isolées. Repérer le maximum. Rechercher la valeur exacte du maximum, ou, au moins une très bonne approximation de ce maximum.

Utiliser la table des valeurs pour réaliser le graphique de V sur papier. Choisir des unités sur les axes de coordonnées. Choisir un pas pour les valeurs successives de x assurant un tracé le plus précis possible. Tracer le graphique.

4) Dans cette question, on se proposer de déterminer la longueur x donnant un volume de 72 cm^3.

a) Montrer comment la lecture du graphique permet de prévoir l'existence de deux solutions à ce problème dont l'une semble être x = 2.

b) Vérifier par le calcul que la solution entière x = 2 entrevue sur le graphique est bien exactement une solution de l'équation V(x) = 72.

c) Évaluer graphiquement la valeur de la deuxième solution. Affiner la précision de la réponse en utilisant au mieux votre calculatrice.

Facultatif pour les élèves en avance:

d) Déterminer les 3 réels a, b et c tels que: $V(x) - 72 = (x - 2)\,(ax^2 + bx + c)$

e) Expliquer pourquoi la deuxième solution de l'équation V(x) = 72 est l'une des deux solutions de l'équation: $x^2 - 8x + 9 = 0$.

f) Essayer de résoudre cette équation en la transformant sous la forme $(x - p)^2 - q^2$ où les réels p et q sont à trouver. Si vous avez réussi cette transformation, il ne reste plus qu'à factoriser.

g) Après avoir résolu cette équation, vous vous trouvez avec une solution de trop. Comment cela est-il possible ? Expliquez à l'aide de votre calculatrice graphique.

Après réflexion, éliminez la mauvaise, gardez la bonne et comparez sa valeur avec l'évaluation approximative réalisée à la question c)

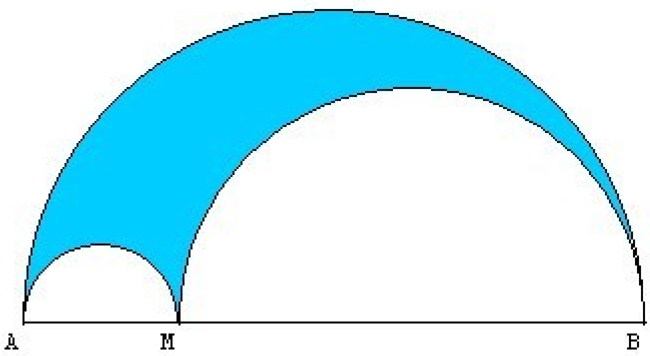
Exercice n° 3:

(C) est un cercle de centre O et de rayon 2.
(C') est un cercle de centre O' et de rayon 1.
On note OO' = x.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, qui, à la distance x, fait correspondre f(x) = "nombre de tangentes communes aux cercles (C) et (C')".

1) Déterminer f(x) selon les valeurs de $x \in \mathbb{R}^+$.
2) Réaliser le graphique de la fonction f dans un repère du plan

Exercice n° 4:



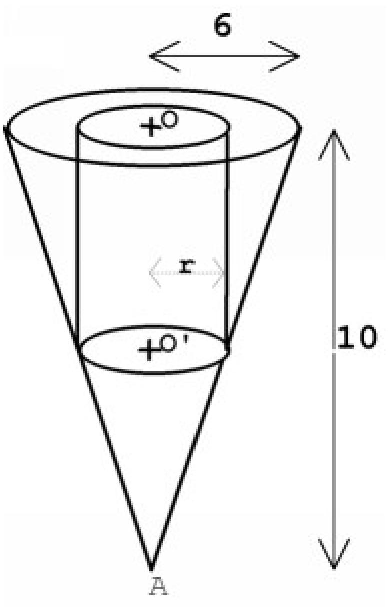
Le dessin ci-contre représente un demi-cercle de diamètre AB = 2 cm.
M est un point du segment [AB] repéré par sa distance au point A. Cette distance est notée x (en cm).

On complète le dessin par les deux demi-cercles de diamètres [AM] et [MB].

A chaque valeur de x, on associe l'aire $\mathcal{A}(x)$ (en cm^2) de la surface grisée (lunule). Le but du problème est d'étudier comment varie l'aire $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x.

1) Quel est l'ensemble de définition de la fonction $\mathcal{A}$?
2) Quelles sont les aires des demi-disques de diamètre AB, AM et MB ?
3) En déduire, en fonction de x, la formule qui donne l'aire $\mathcal{A}(x)$ de la lunule.
4) Tracer le graphique de cette fonction sur votre calculatrice. Choisissez un cadrage adapté.
5) Évaluer graphiquement l'aire maximum de la lunule. Pour quelle valeur de x est-elle obtenue ? Cela était-il prévisible ?

Exercice n° 5:



Le dessin ci-contre représente un cône de sommet A, de hauteur 10 cm, dont le disque de base , de centre O, a un rayon de 6 cm.

Un cylindre dont un disque de base, de centre O et de rayon r, est contenu dans le disque de base du cône. La circonférence de l'autre base du cylindre, de centre O' situé sur [OA], vient reposer sur la surface conique, comme cela est représenté ci-contre.

1) Réaliser le dessin d'un plan de coupe du solide passant par les points O, O' et A.
2) Écrire l'égalité qui relie O'A et r. En déduire une égalité reliant OO' et r.
3) Exprimer le volume V du cylindre (en cm^3), en fonction du rayon r.
4) En précisant son ensemble de définition, étudier les variations de la fonction V: $r \mapsto V(r)$ en se posant des question analogues à celles de l'exercice n° 2.