

Sens de variation d'une fonction

Il est impératif que la fonction f soit définie sur un intervalle I de \mathbb{R} (qui peut bien sûr être \mathbb{R} en entier).

- f est croissante sur l'intervalle I signifie:

Pour tout $a \in I$ et $b \in I$ tels que $a \leq b$, alors on a : $f(a) \leq f(b)$.

C'est à dire que les images de deux réels quelconques sont rangées dans le même ordre que ces deux réels.

- f est strictement croissante sur l'intervalle I signifie:

Pour tout $a \in I$ et $b \in I$ tels que $a < b$, alors on a : $f(a) < f(b)$.

- f est décroissante sur l'intervalle I signifie:

Pour tout $a \in I$ et $b \in I$ tels que $a \leq b$, alors on a : $f(a) \geq f(b)$.

C'est à dire que les images de deux réels quelconques sont rangées dans l'ordre inverse de ces deux réels.

- f est strictement décroissante sur l'intervalle I signifie:

Pour tout $a \in I$ et $b \in I$ tels que $a < b$, alors on a : $f(a) > f(b)$.

- f est constante sur l'intervalle I signifie:

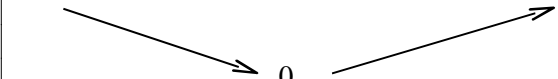
Pour tout $a \in I$ et $b \in I$, on a : $f(a) = f(b)$

• Une fonction est appelée *monotone sur un intervalle* I , lorsqu'elle est croissante sur I ou bien décroissante sur I .

Par exemple, la fonction carré n'est pas monotone sur \mathbb{R} car elle est croissante sur $[0 ; +\infty[$, mais elle est décroissante sur $]-\infty ; 0]$. Elle est donc monotone sur $[0 ; +\infty[$ et sur $]-\infty ; 0]$, mais pas sur la réunion de ces deux intervalles.

Étudier les variations d'une fonction, c'est déterminer les intervalles de monotonie, c'est à dire les intervalles sur lesquels la fonction est monotone. Les conclusions de cette enquête sont résumées dans le tableau des variations de la fonction.

Exemple : Tableau des variations de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f			

Extremum : Maximum - Minimum

Si f est une fonction définie sur un intervalle I :

- S'il existe $a \in I$ tel que, pour tout $x \in I$, on ait: $f(x) \leq f(a)$, on dit que $f(a)$ est le maximum de f sur I ou que f admet un maximum sur I en $x = a$.

- S'il existe $a \in I$ tel que, pour tout $x \in I$, on ait: $f(x) \geq f(a)$, on dit que $f(a)$ est le minimum de f sur I ou que f admet un minimum sur I en $x = a$.

Exemples :

La fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = 3 - x$

Sur $[0 ; 1]$ f a pour minimum : $f(1) = 2$ et pour maximum : $f(0) = 3$.

En effet pour tout $x \in [0 ; 1]$, on a : $2 \leq f(x) \leq 3$.

La fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = x^2$ a pour minimum $g(0) = 0$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $g(x) \geq 0$, mais n'a pas de maximum sur \mathbb{R} .