Fonctions

Introduction

Au collège, puis dans diverses activités pratiquées en seconde, quelques exemples de fonctions numériques ont été étudiés. Pour réaliser ces études, divers procédés sont utilisés : formules de calcul, graphiques, tableaux de valeurs. La calculatrice graphique est un bon outil de travail.

En classe de troisième, vous avez étudié les fonctions affines que nous avons un peu utilisées à nouveau cette année.

Par manque de temps, peu d'exemples d'introduction sont vus en classe: vous pouvez compléter cela en consultant mon site Web où les exercices de l'année dernière peuvent être téléchargés.

Ces exemples ne reflètent pas tous les aspects de la notion générale de fonction. Bien que cela ne soit plus au programme des classes de lycée, sachez que :

Définir une fonction (les mathématiciens disent plutôt : application), c’est associer à chaque élément d’un ensemble (ensemble de départ) un élément unique d’un ensemble (ensemble d’arrivées).

Voici quelques exemples supplémentaires, qui devraient vous permettre de bien localiser l’étude engagée cette année:

• *Fonction où les nombres n'interviennent pas*: Fonction définie sur l’ensemble des élèves de 2^{de} du Lycée Jean Moulin vers l’ensemble des groupes sanguins {O;A;B;AB} qui, à chaque élève, associe son groupe sanguin.

• *Fonction numérique où la variable n'est pas numérique*: Fonction définie sur l’ensemble des élèves de 2^{de} du Lycée Jean Moulin vers l’ensemble $\mathbb{R}^+$, qui, à chaque élève, associe le nombre mesurant sa taille en centimètres.

• *Fonction non numérique d'une variable numérique*: Fonction définie sur l’ensemble des n°INSEE (à 13 chiffres) attribués en France, qui, à chaque numéro, fait correspondre l’individu qu’il code.

• ***<u>Fonctions numériques de la variable réelle</u>***: Fonctions définies sur $\mathbb{R}$ (ou une partie de $\mathbb{R}$). A tout nombre réel de cet ensemble (ensemble de définition de la fonction) on associe un nombre réel unique. Elles sont essentielles: Ce sont celles que vous allez étudier au lycée.

Par exemple :

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto y=2x$ A tout réel *x*, on associe le double de ce réel.

$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ A tout réel *x* positif ou nul, on associe sa racine carrée.

$x \mapsto y=\sqrt{x}$ N’est pas définie pour les réels négatifs.

$\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ A tout réel *x* non nul, on associe son inverse.

$x \mapsto y=\dfrac{1}{x}$ N’est pas définie pour $x=0$.

Les trois exemples ci-dessus concernent des fonction abstraites. On peut y ajouter des exemples concrets que vous trouverez sur mon site Web.

• *Fonctions de plusieurs variables* : Fonction qui, aux deux réels positifs *x* et *y* associe l’aire du rectangle $A(x\,;\,y)=x\times y$. Au lycée, de telles fonctions sont seulement étudiées en série ES (option math de $1^{ère}$ et spécialité math de terminale)

Définition d'une fonction numérique de la variable réelle

Définir une fonction *f* sur l'ensemble $\mathscr{D}_f \subset \mathbb{R}$, c'est donner un procédé, qui à chaque nombre réel $x \in \mathscr{D}_f$, fait correspondre un nombre réel unique noté *f(x)* qui est l'image de *x* par la fonction *f*.

Une fonction $$\begin{array}{rcl} f : \mathscr{D}_f & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

est déterminée par :

- La **variable** *x* et son **image** *f(x)*.
- L'association reliant *x* à *f(x)*. Pour les fonctions numériques de la variable réelle, il s'agit la plupart du temps d'une formule de calcul.
- **L'ensemble de définition de *f*** : C'est la partie $\mathscr{D}_f$ de $\mathbb{R}$ qui contient tous les réels *x* pour lesquels *f(x)* existe.

Exemple :
Si *f* est la fonction « carré ». Elle définie sur $\mathbb{R}$ par la formule $f(x) = x^2$.
3 a pour image $f(3) = 3^2 = 9$
-3 a pour image $f(-3) = (-3)^2 = 9$
On remarque que 3 et -3 ont la même image par la fonction *f*.
C'est normal, car deux nombres opposés ont le même carré !

On dit alors que 9 a pour **antécédents** les nombres 3 et -3.
De même :
2 a deux antécédents : $\sqrt{2}$ et $- -\sqrt{2}$.
0 a un seul antécédent : 0
-2 n'a pas d'antécédent, car aucun nombre négatif ne peut être le carré d'un nombre réel.

De façon générale :
Dire que *x* est l'antécédent de *y* par *f*, c'est dire que *y* est l'image de *x* par *f*, c'est à dire que $y = f(x)$.

Remarques :
Tout réel *x* appartenant à l'ensemble de définition d'une fonction *f* possède une image unique *f(x)*.
Mais, réciproquement, un réel peut posséder aucun, un seul ou plusieurs antécédents par la fonction *f*.
Trouver les antécédents d'un réel *y* par la fonction *f*, c'est résoudre l'équation : $y = f(x)$ où *x* est l'inconnue.

Représentation graphique d'une fonction dans un repère

Si $$\begin{array}{rcl} f : \mathscr{D}_f & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

est une fonction définie sur son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$

La représentation graphique de la fonction *f* dans le repère $(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x\ ; y)$ où $x \in \mathscr{D}_f$ et $y = f(x)$.

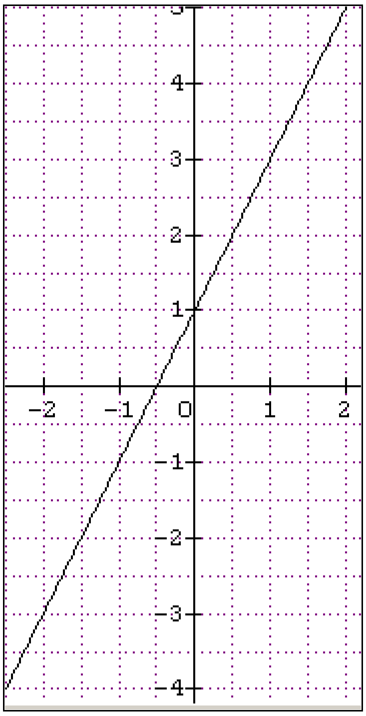
C'est à dire :

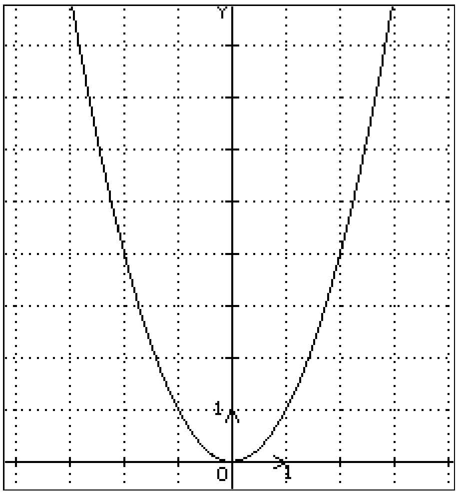
Si *f* est une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$ a pour représentation graphique la courbe $\mathscr{C}_f$, ,alors, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a : $M \in \mathscr{C}_f$ équivaut à : $M(x\ ; f(x))$.

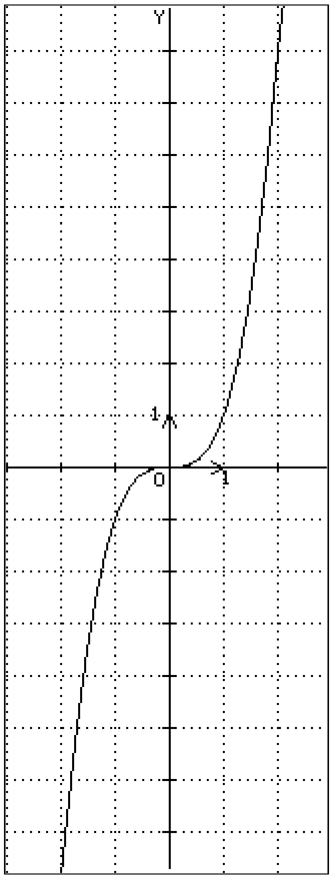
Remarque :

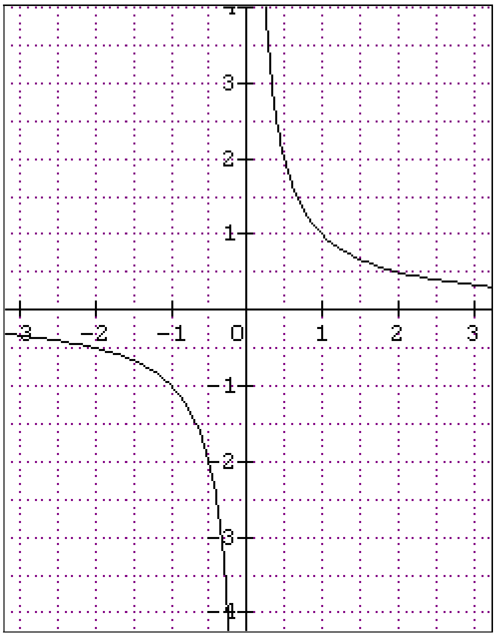
La représentation graphique de la fonction *f* dans un repère est souvent appelée « ***Courbe représentative de la fonction f*** » et même parfois « ***Courbe de f*** » y compris dans les cas où la représentation graphique de *f* est une droite ou une ligne brisée formée de segments de droites.

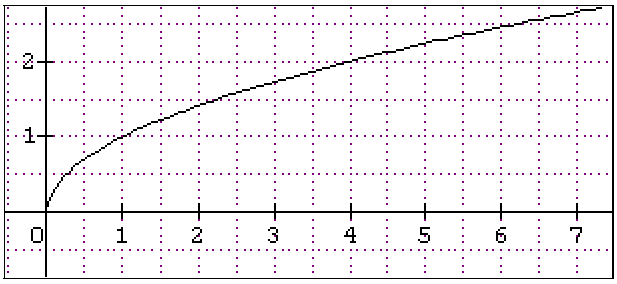
Exemples et contre-exemples :

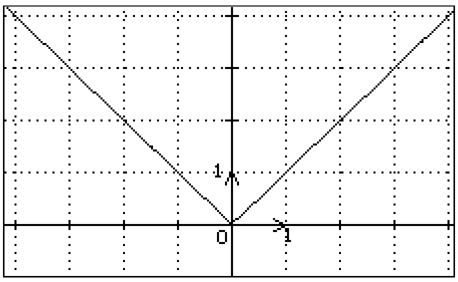


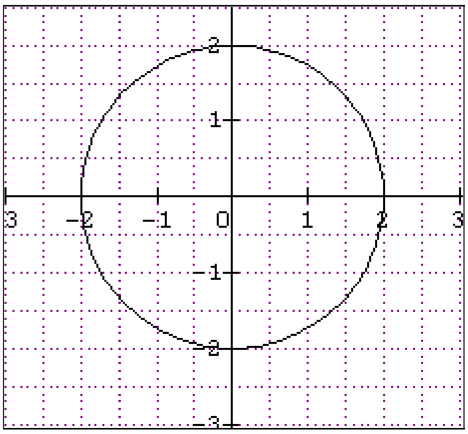


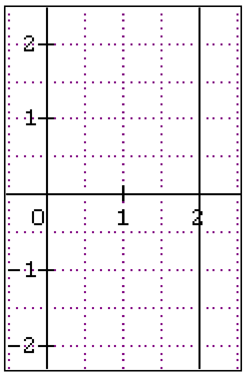












Équation d'une courbe dans un repère:

Si la courbe $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique de la fonction *f* dans un repère, alors, l'égalité $y = f(x)$ reliant les coordonnées $(x\,;\,y)$ de tous les points de $\mathscr{C}_f$ est appelé :
« **équation de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans ce repère** ».

Exemples :

$y = 2x + 1$ est l'équation de le droite *(AB)* passant par les point $A(0\,;1)$ et $B(1\,;3)$.
$y = x^2$ est l'équation de la parabole qui représente graphiquement la fonction « carré ».
$y = \dfrac{1}{x}$ est l'équation de l'hyperbole qui représente graphiquement la fonction « inverse ».

On remarquera qu'une courbe n'est pas forcément le graphique d'une fonction :
Sur les exemples de la feuille précédente, c'est le cas du cercle et de la droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Lecture graphique des images et des antécédents

On a vu que si *f* est une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$ a pour représentation graphique la courbe $\mathscr{C}_f$, alors, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a : $M \in \mathscr{C}_f$ équivaut à : $M\,(x\,;\,f(x))$.

Donc :

- L'image *f(x)* du réel $x \in \mathscr{D}_f$ par la fonction *f*, est l'ordonnée du point *M* d'abscisse *x* de la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de *f* .
- Réciproquement, un antécédent de $a \in \mathbb{R}$ par la fonction *f* (s'il existe), est un nombre $x \in \mathscr{D}_f$ tel que $f(x) = a$, c'est donc l'abscisse de l'un des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ dont l'ordonnée est *a*.
- Les solutions de l'équation $f(x) = a$ sont les antécédents du nombre $a \in \mathbb{R}$ par la fonction *f*.
- Les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant a$ sont les antécédents par la fonction *f* des nombres inférieurs ou égaux à *a*. Ce sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ dont les ordonnées sont inférieures ou égales à *a*.

Exemples :