

Pourcentages

Pourcentages et proportions

Un ensemble E contient n éléments et une de ses parties P en contient k .

La fraction $\frac{k}{n}$ représente la proportion d'éléments de la partie P dans l'ensemble E.

Cette fraction peut s'exprimer sous la forme du pourcentage $t\%$ tel que $\frac{k}{n} = \frac{t}{100}$

Exemple:

Il y a 17 filles dans une classe de 32 élèves. La proportion de filles dans la classe est $\frac{17}{32}$.

$\frac{17}{32} = 0,53125 \approx 53\%$. Il y a donc environ 53% de filles dans cette classe.

Quelques proportions utiles à retenir:

$$\frac{1}{2} = 0,5 = 50\% \quad , \quad \frac{1}{4} = 0,25 = 25\% \quad , \quad \frac{3}{4} = 0,75 = 75\% \quad , \quad \frac{1}{5} = 0,2 = 20\% \quad , \quad \frac{1}{3} \approx 0,3333 = 33,33\%$$

Opérateur pourcentage (pourcentage instantané)

Prendre $t\%$ d'une quantité Q, c'est la multiplier par $\frac{t}{100}$.

Exemple:

Dans un magazine de 180 pages, 30% sont des pages de publicité. Il y a donc:

$$180 \times 30\% = 180 \times \frac{30}{100} = 180 \times 0,3 = 54 \text{ pages de publicité.}$$

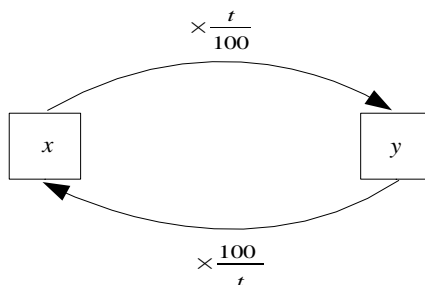
Tableau de proportionnalité:

Quantité Q	100	x
$t\%$ de Q	t	y

L'application de la règle des produits en croix égaux fournit les 3 formules suivantes :

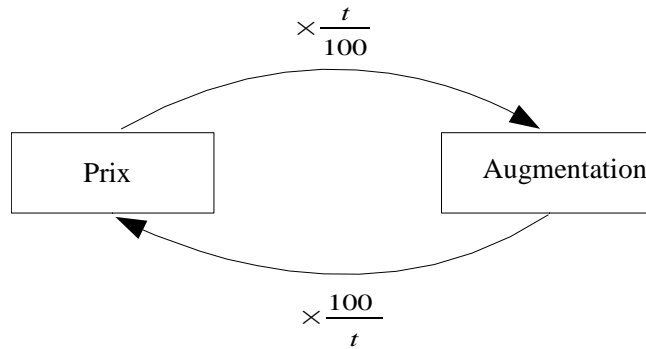
$$y = \frac{x \times t}{100} \quad , \quad t = \frac{y \times 100}{x} \quad , \quad x = \frac{y \times 100}{t}$$

L'information « y représente $t\%$ de x » peut aussi être représentée par le schéma :



Exemples:

Dans les trois exemples qui suivent, un prix x subit une augmentation de $t\%$. y représente l'augmentation.



1) Une somme de 150 € augmente de 25 %.

$$\text{Le montant de l'augmentation est: } 150 \text{ €} \times \frac{25}{100} = 150 \text{ €} \times 0,25 = 37,5 \text{ €}$$

2) Une augmentation de 40 % se traduit par une hausse de prix de 30 €.

$$\text{Le prix de départ était: } 30 \text{ €} \cdot \frac{40}{100} = 30 \text{ €} \times \frac{100}{40} = 75 \text{ €}$$

3) Une augmentation de 24 € sur un montant de 120 € représente $\frac{24}{120} = 0,2 = 20\%$ d'augmentation.

Pourcentages successifs (pourcentage de pourcentage)

Quand on prend $t_1\%$ des $t_2\%$ d'une quantité Q , le taux final t vérifie la formule :

$$\frac{t}{100} = \frac{t_1}{100} \times \frac{t_2}{100}$$

Exemple:

Dans un lycée, 55 % des élèves sont des filles, et 25 % des filles ont les yeux bleus.

Il y a donc: $\frac{55}{100} \times \frac{25}{100} = \frac{1375}{10000} = 13,75\%$ de filles aux yeux bleus dans ce lycée.

Pourcentage d'évolution (augmentation ou diminution)

A) Connaissant les quantités de départ et d'arrivée

1) Après augmentation de $t\%$, une quantité Q_1 est devenue Q_2 .

Comment calculer t à partir des quantités Q_1 et Q_2 ?

L'augmentation est: $Q_2 - Q_1$. Le pourcentage d'augmentation $t\%$ est donné par: $\frac{t}{100} = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_1}$.

2) Après diminution de $t\%$, une quantité Q_1 est devenue Q_2 .

Comment calculer t à partir des quantités Q_1 et Q_2 ?

La diminution est: $Q_1 - Q_2$. Le pourcentage de diminution $t\%$ est donné par: $\frac{t}{100} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$

Exemples:

1) Un magazine passe de 80 pages à 90 pages.

Son nombre de pages a augmenté de: $\frac{90 - 80}{80} = \frac{10}{80} = 0,125 = 12,5 \%$.

2) Un lycée voit son effectif passer de 800 à 750 élèves.

Son effectif a diminué de: $\frac{800 - 750}{800} = \frac{50}{800} = 0,0625 = 6,25 \%$.

B) Connaissant le taux d'évolution

Considérons un article dont le prix est P .

1) On augmente le prix initial P de $t \%$. Quel est le nouveau prix après cette augmentation?

L'augmentation est: $P \times \frac{t}{100}$.

Le nouveau prix sera donc après augmentation: $P + P \times \frac{t}{100} = P \left(1 + \frac{t}{100} \right)$.

Le prix initial P a donc été multiplié par $1 + \frac{t}{100}$.

2) On diminue le prix initial P de $t \%$. Quel est le nouveau prix après cette diminution?

La diminution est: $P \times \frac{t}{100}$.

Le nouveau prix sera donc après diminution: $P - P \times \frac{t}{100} = P \left(1 - \frac{t}{100} \right)$.

Le prix initial P a donc été multiplié par $1 - \frac{t}{100}$.

Règles à retenir:

Augmenter un prix de $t \%$, c'est le multiplier par $1 + \frac{t}{100}$.

Diminuer un prix de $t \%$, c'est le multiplier par $1 - \frac{t}{100}$.

Exemples:

1) Augmenter un prix de 5 % revient à le multiplier par 1,05.

Diminuer un prix de 15 % revient à le multiplier par 0,85.

2) Multiplier un prix par 1,2 revient à lui appliquer une augmentation de 20 %.

Multiplier un prix par 0,9 revient à lui appliquer une réduction de 10 %.

3) Le prix d'un article passe de 25 € à 27 €. Quel est le pourcentage d'augmentation ?

Le prix a été multiplié par $\frac{27}{25} = 1,08 = 1 + 0,08 = 1 + \frac{8}{100}$, il a donc subi une augmentation de 8 %.

4) Le prix d'un article passe de 60 € à 55,5 €. Quel est le pourcentage de réduction ?

Le prix a été multiplié par $\frac{55,5}{60} = 0,925 = 1 - 0,075 = 1 - \frac{7,5}{100}$, il a donc subi une réduction de 7,5 %.

Augmentations successives

Appliquer à un prix P une augmentation de $t_1\%$, suivie d'une augmentation de $t_2\%$, revient à effectuer deux multiplications successives par $\left(1 + \frac{t_1}{100}\right)$, puis par $\left(1 + \frac{t_2}{100}\right)$.

Finalement on a multiplié le prix P par $\left(1 + \frac{t_1}{100}\right)\left(1 + \frac{t_2}{100}\right)$.

On peut alors interpréter cette multiplication comme une augmentation en pourcentage.

Exemple:

La population d'une ville augmente de 20 % l'année 2005, puis de 25 % l'année 2006. Quel est le pourcentage d'augmentation pour ces deux années ?

En 2005 la population a été multipliée par 1,2.

En 2006 la population a été multipliée par 1,25.

Pour les deux années, la population a été multipliée par $1,2 \times 1,25 = 1,5 = 1 + 0,5$, ce qui correspond à une augmentation de 50 %.

Diminutions successives

Appliquer à un prix P une diminution de $t_1\%$, suivie d'une diminution de $t_2\%$, revient à effectuer deux multiplications successives par $\left(1 - \frac{t_1}{100}\right)$, puis par $\left(1 - \frac{t_2}{100}\right)$.

Finalement on a multiplié le prix P par $\left(1 - \frac{t_1}{100}\right)\left(1 - \frac{t_2}{100}\right)$.

On peut alors interpréter cette multiplication comme une diminution en pourcentage.

Exemple:

Un article subit une diminution de 5 %, suivie d'une diminution de 10 %.

La diminution de 5 % correspond à une multiplication par 0,95.

La diminution de 10 % correspond à une multiplication par 0,9.

Après ces deux diminutions, le prix de l'article a donc été multiplié par $0,95 \times 0,9 = 0,855 = 1 - 0,145$ ce qui correspond à une diminution de 14,5 %.

Augmentation et diminution successives

On peut combiner les deux cas précédents.

Exemple:

Un article subit une augmentation de 20 %, suivie d'une réduction de 20 %.

L'augmentation de 20 % correspond à une multiplication par 1,2.

La réduction de 20 % correspond à une multiplication par 0,8.

Après ces deux variations, le prix de l'article a donc été multiplié par $1,2 \times 0,8 = 0,96 = 1 - 0,04$, ce qui correspond à une baisse de 4 %.

Remarques:

Une hausse de $t_1\%$, suivie d'une hausse de $t_2\%$, n'est pas équivalente à une hausse de $(t_1 + t_2)\%$.

Une baisse de $t_1\%$, suivie d'une baisse de $t_2\%$, n'est pas équivalente à une baisse de $(t_1 + t_2)\%$.

Une hausse de $t\%$ n'est pas compensée par une baisse de $t\%$.