Pourcentages

Pourcentages et proportions

> Un ensemble E contient n éléments et une de ses parties P en contient k.
>
> La fraction $\dfrac{k}{n}$ représente la proportion d'éléments de la partie P dans l'ensemble E.
>
> Cette fraction peut s'exprimer sous la forme du pourcentage t % tel que $\dfrac{k}{n}=\dfrac{t}{100}$

Exemple:

Il y a 17 filles dans une classe de 32 élèves. La proportion de filles dans la classe est $\dfrac{17}{32}$.

$\dfrac{17}{32}=0{,}53125\approx 53\ \%$. Il y a donc environ 53 % de filles dans cette classe.

Quelques proportions utiles à retenir:

$$\frac{1}{2}=0{,}5=50\ \% \ ,\ \frac{1}{4}=0{,}25=25\ \% \ ,\ \frac{3}{4}=0{,}75=75\ \% \ ,\ \frac{1}{5}=0{,}2=20\ \% \ ,\ \frac{1}{3}\approx 0{,}3333=33{,}33\ \%$$

Opérateur pourcentage (pourcentage instantané)

> Prendre t % d'une quantité Q, c'est la multiplier par $\dfrac{t}{100}$.

Exemple:

Dans un magazine de 180 pages, 30 % sont des pages de publicité. Il y a donc:

$$180\times 30\ \%=180\times\frac{30}{100}=180\times 0{,}3=54 \text{ pages de publicité.}$$

Tableau de proportionnalité:

Quantité Q	100	x
t % de Q	t	y

$\times\dfrac{t}{100}$

L'application de la règle des produits en croix égaux fournit les 3 formules suivantes :

$$y=\frac{x\times t}{100} \quad , \quad t=\frac{y\times 100}{x} \quad , \quad x=\frac{y\times 100}{t}$$

L'information « y représente t % de x » peut aussi être représentée par le schéma :

$$\begin{tikzcd} \boxed{x} \arrow[r, bend left, "\times\frac{t}{100}"] & \boxed{y} \arrow[l, bend left, "\times\frac{100}{t}"] \end{tikzcd}$$

Exemples:

Dans les trois exemples qui suivent, un prix x subit une augmentation de t % .y représente l'augmentation.

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{Prix}} \arrow[r, bend left, "\times \frac{t}{100}"] & \boxed{\text{Augmentation}} \arrow[l, bend left, "\times \frac{100}{t}"] \end{tikzcd}$$

1) Une somme de 150 € augmente de 25 %.

Le montant de l'augmentation est: $150\text{ €} \times \frac{25}{100} = 150\text{ €} \times 0{,}25 = 37{,}5\text{ €}$.

2) Une augmentation de 40 % se traduit par une hausse de prix de 30 €.

Le prix de départ était: $30\text{ €} : \frac{40}{100} = 30\text{ €} \times \frac{100}{40} = 75\text{ €}$.

3)Une augmentation de 24 € sur un montant de 120 € représente $\frac{24}{120} = 0{,}2 = 20\ \%$ d'augmentation.

Pourcentages successifs (pourcentage de pourcentage)

Quand on prend t_1 % des t_2 % d'une quantité Q, le taux final t vérifie la formule :

$$\frac{t}{100} = \frac{t_1}{100} \times \frac{t_2}{100}$$

Exemple:

Dans un lycée, 55 % des élèves sont des filles, et 25 % des filles ont les yeux bleus.

Il y a donc: $\frac{55}{100} \times \frac{25}{100} = \frac{1375}{10000} = 13{,}75\ \%$ de filles aux yeux bleus dans ce lycée.

Pourcentage d'évolution (augmentation ou diminution)

A) Connaissant les quantités de départ et d'arrivée

1) Après augmentation de t *%*, une quantité Q_1 est devenue Q_2 .

Comment calculer t à partir des quantités Q_1 et Q_2 ?

L'augmentation est: $Q_2 - Q_1$. Le pourcentage d'augmentation t *%* est donné par: $\frac{t}{100} = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_1}$.

2) Après diminution de t *%*, une quantité Q_1 est devenue Q_2 .

Comment calculer t à partir des quantités Q_1 et Q_2 ?

La diminution est: $Q_1 - Q_2$. Le pourcentage de diminution t *%* est donné par: $\frac{t}{100} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$

Exemples:

1) Un magazine passe de 80 pages à 90 pages.

Son nombre de pages a augmenté de: $\frac{90-80}{80}=\frac{10}{80}=0{,}125=12{,}5\ \%$.

2) Un lycée voit son effectif passer de 800 à 750 élèves.

Son effectif a diminué de: $\frac{800-750}{800}=\frac{50}{800}=0{,}0625=6{,}25\ \%$.

B) Connaissant le taux d'évolution

Considérons un article dont le prix est *P*.

1) On augmente le prix initial *P* de *t* %. Quel est le nouveau prix après cette augmentation?

L'augmentation est: $P \times \frac{t}{100}$.

Le nouveau prix sera donc après augmentation: $P+P \times \frac{t}{100}=P\left(1+\frac{t}{100}\right)$.

Le prix initial *P* a donc été multiplié par $1+\frac{t}{100}$.

2) On diminue le prix initial *P* de *t* %. Quel est le nouveau prix après cette diminution?

La diminution est: $P \times \frac{t}{100}$.

Le nouveau prix sera donc après diminution: $P-P \times \frac{t}{100}=P\left(1-\frac{t}{100}\right)$.

Le prix initial *P* a donc été multiplié par $1-\frac{t}{100}$.

Règles à retenir:

> Augmenter un prix de *t* %, c'est le multiplier par $1+\frac{t}{100}$.
>
> Diminuer un prix de *t* %, c'est le multiplier par $1-\frac{t}{100}$.

Exemples:

1) Augmenter un prix de 5 % revient à le multiplier par 1,05.

Diminuer un prix de 15 % revient à le multiplier par 0,85.

2) Multiplier un prix par 1,2 revient à lui appliquer une augmentation de 20 %.

Multiplier un prix par 0,9 revient à lui appliquer une réduction de 10 %.

3) Le prix d'un article passe de 25 € à 27 €. Quel est le pourcentage d'augmentation ?

Le prix a été multiplié par $\frac{27}{25}=1{,}08=1+0{,}08=1+\frac{8}{100}$, il a donc subi une augmentation de 8 %.

4) Le prix d'un article passe de 60 € à 55,5 €. Quel est le pourcentage de réduction ?

Le prix a été multiplié par $\frac{55{,}5}{60}=0{,}925=1-0{,}075=1-\frac{7{,}5}{100}$, il a donc subi une réduction de 7,5 %.

Augmentations successives

Appliquer à un prix P une augmentation de t_1 %, suivie d'une augmentation de t_2 %, revient à effectuer deux multiplications successives par $\left(1+\frac{t_1}{100}\right)$, puis par $\left(1+\frac{t_2}{100}\right)$.

Finalement on a multiplié le prix P par $\left(1+\frac{t_1}{100}\right)\left(1+\frac{t_2}{100}\right)$.

On peut alors interpréter cette multiplication comme une augmentation en pourcentage.

Exemple:

La population d'une ville augmente de 20 % l'année 2005, puis de 25 % l'année 2006. Quel est le pourcentage d'augmentation pour ces deux années ?

En 2005 la population a été multipliée par 1,2.

En 2006 la population a été multipliée par 1,25.

Pour les deux années, la population a été multipliée par $1{,}2\times 1{,}25=1{,}5=1+0{,}5$, ce qui correspond à une augmentation de 50 %.

Diminutions successives

Appliquer à un prix P une diminution de t_1 %, suivie d'une diminution de t_2 %, revient à effectuer deux multiplications successives par $\left(1-\frac{t_1}{100}\right)$, puis par $\left(1-\frac{t_2}{100}\right)$.

Finalement on a multiplié le prix P par $\left(1-\frac{t_1}{100}\right)\left(1-\frac{t_2}{100}\right)$.

On peut alors interpréter cette multiplication comme une diminution en pourcentage.

Exemple:

Un article subit une diminution de 5 %, suivie d'une diminution de 10 %.

La diminution de 5 % correspond à une multiplication par 0,95.

La diminution de 10 % correspond à une multiplication par 0,9.

Après ces deux diminutions, le prix de l'article a donc été multiplié par $0{,}95\times 0{,}9=0{,}855=1-0{,}145$ ce qui correspond à une diminution de 14,5 %.

Augmentation et diminution successives

On peut combiner les deux cas précédents.

Exemple:

Un article subit une augmentation de 20 %, suivie d'une réduction de 20 %.

L'augmentation de 20 % correspond à une multiplication par 1,2.

La réduction de 20 % correspond à une multiplication par 0,8.

Après ces deux variations, le prix de l'article a donc été multiplié par $1{,}2\times 0{,}8=0{,}96=1-0{,}04$, ce qui correspond à une baisse de 4 %.

Remarques:

Une hausse de t_1 %, suivie d'une hausse de t_2 %, n'est pas équivalente à une hausse de (t_1+t_2) %.

Une baisse de t_1 %, suivie d'une baisse de t_2 %, n'est pas équivalente à une baisse de (t_1+t_2) %.

Une hausse de t % n'est pas compensée par une baisse de t %.