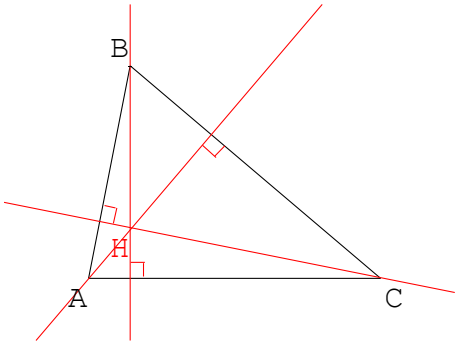
Configurations géométriques planes – Rappels du collège

1. Le triangle : droites et points remarquables

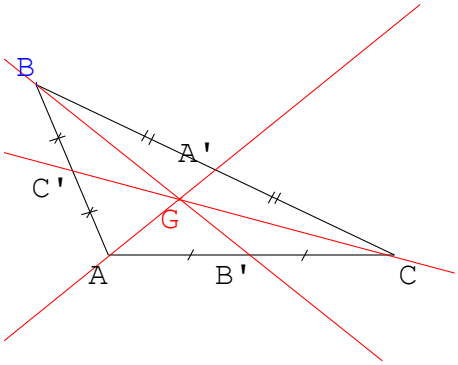
1.1 Hauteurs et orthocentre



Définition : La **hauteur** issue d'un sommet est la droite passant par ce sommet et perpendiculaire au côté opposé.

Propriété : Les hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point H, appelé **orthocentre** du triangle.

1.2 Médianes et centre de gravité



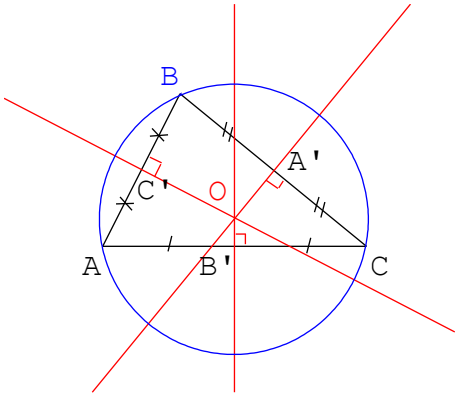
Définition : La **médiane** issue d'un sommet est la droite reliant ce sommet au milieu du côté opposé.

Propriété : Les médianes d'un triangle sont concourantes en un point G, appelé **centre de gravité** du triangle.

G est situé au tiers à partir de la base sur chaque segment de médiane :

$GA' = \frac{1}{3} AA'$; $GB' = \frac{1}{3} BB'$; $GC' = \frac{1}{3} CC'$.

1.3 Médiatrices et centre du cercle circonscrit



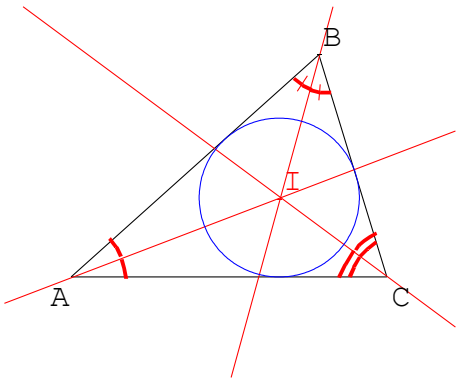
Définition 1 : La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu.

Définition 2 : La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment.

Propriété : Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point O.

O est le centre du cercle circonscrit au triangle.

1.4 Bissectrices et centre du cercle inscrit



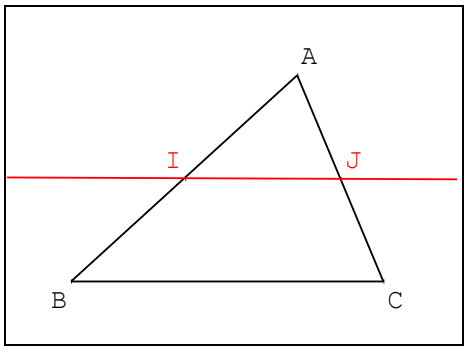
Définition : La bissectrice d'un angle est la droite qui partage cet angle en deux angles égaux.

Propriété : Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes en un point I.

I est le centre du cercle inscrit dans le triangle.

1.5 Théorème des milieux

Théorème : Le segment joignant les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et a pour longueur la moitié du troisième côté.



Si : I est le milieu de $[AB]$, J est le milieu de $[AC]$

Alors : $(IJ) // (BC)$ et $IJ = \frac{1}{2} BC$

Réciproque : La droite passant par le milieu d'un côté et parallèle à un deuxième côté coupe le troisième côté en son milieu.

Si : I est le milieu de $[AB]$ et si la droite parallèle à (BC) passant par I coupe (AC) en J.

Alors : J est le milieu de $[AC]$ et $IJ = \frac{1}{2} BC$.

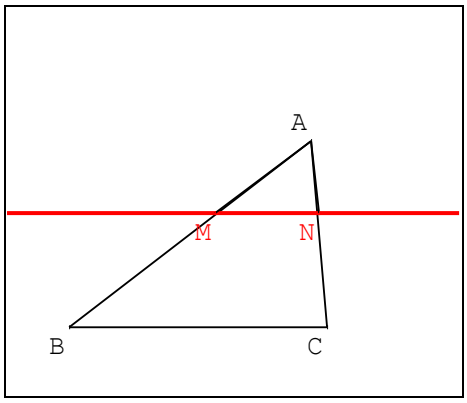
2. Propriété de Thalès

Théorème :

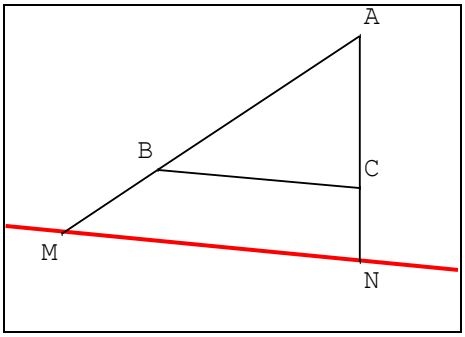
Si ABC et AMN sont deux triangles tels que :

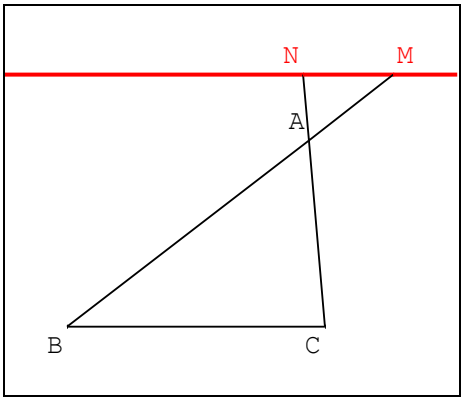
- M est un point de (AB),
- N est un point de (AC),
- Les droites (BC) et (MN) sont parallèles

Alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$



Cet énoncé est aussi valable dans les deux situations représentées sur les figures ci-dessous :





Réciproque :

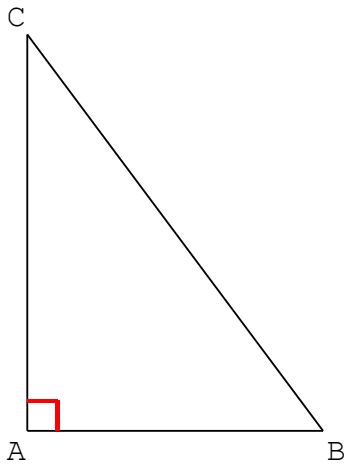
Si ABC et AMN sont deux triangles tels que :

- M est un point de (AB),
- N est un point de (AC),
- Les points A, M, B et A, N, C sont placés dans le même ordre.
- $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

Alors : les droites (MN) et (BC) sont parallèles et $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

3 Triangle rectangle

3.1 Théorème de Pythagore



Théorème : Dans un triangle rectangle le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

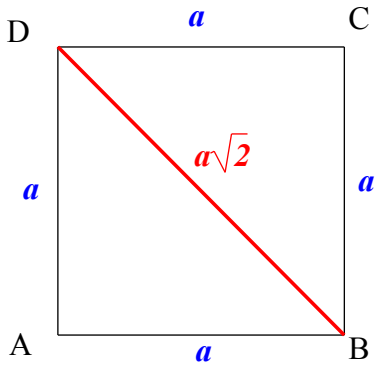
Réciproque : Si dans un triangle le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors ce triangle est rectangle.

Énoncé global :

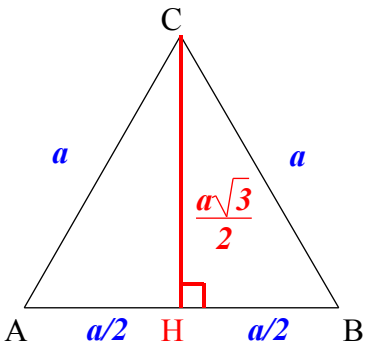
ABC est un triangle rectangle en A
si et seulement si
$BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Deux résultats importants :

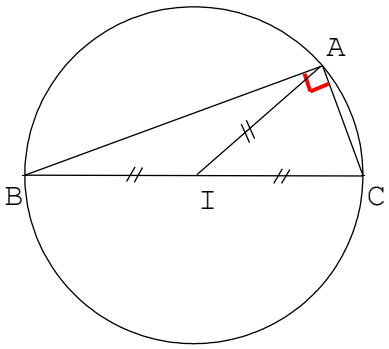
La diagonale d'un carré de côté a a pour longueur $a\sqrt{2}$



Une hauteur d'un triangle équilatéral de côté a a pour longueur $\frac{a\sqrt{3}}{2}$



3.2 Triangle rectangle et cercle

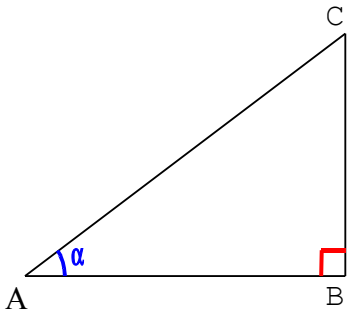


Théorème 1 :
Un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si il est inscrit dans un demi-cercle de diamètre $[BC]$.

Théorème 2 :
Un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si la médiane $[AI]$ vérifie $AI = \frac{1}{2} BC$.

Théorème 3 :
Un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si le milieu I de $[BC]$ est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

3.3 Trigonométrie dans le triangle rectangle.



Définitions

$$\cos\alpha = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\sin\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{BC}{AB}$$

Propriétés : Si α est la mesure d'un angle aigu : $(\cos\alpha)^2+(\sin\alpha)^2=1$ et $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Valeurs remarquables : Il est utile de connaître ces valeurs ou de savoir les retrouver.

$$\cos(60°)=\sin(30°)=\frac{1}{2} \qquad \cos(30°)=\sin(60°)=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos(45°)=\sin(45°)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

4 Angles .

4.1 Somme des angles d'un triangle.

Dans un triangle la somme des angles est égale à 180°.

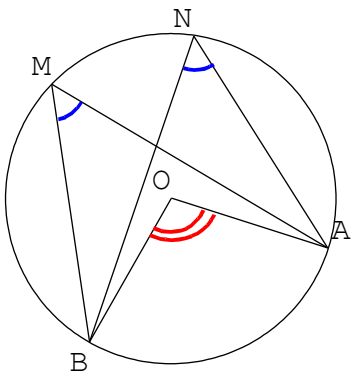
4.2 Angles opposés par le sommet, angles alternes-internes, angles correspondants.

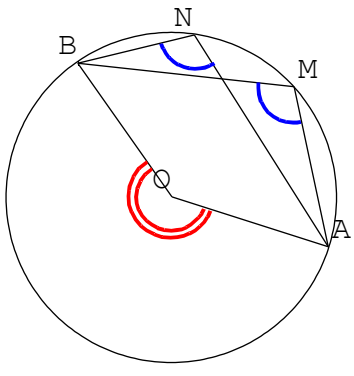
Deux angles opposés par le sommet, deux angles alternes-internes, deux angles correspondants sont égaux.

4.3 Angles inscrits, angles au centre.

Propriété :
Dans un cercle, un angle inscrit est égal à la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

Conséquence :
Deux angles inscrits qui interceptent le même arc sont égaux.





Sur les dessins ci-dessus, on a :

Les angles inscrits $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ interceptent le même arc que l'angle au centre $\widehat{AOB}$.
Ils sont donc égaux à la moitié de cet angle au centre.

C'est à dire : $\widehat{AMB}=\widehat{ANB}=\frac{1}{2}\widehat{AOB}$.