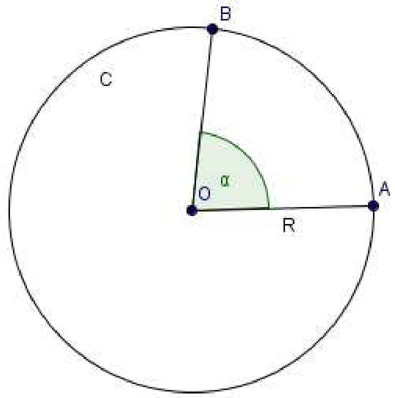
Radian – Angles orientés-Cercle trigonométrique

Longueur d'un arc de cercle. Mesure des angles: Choix d'une unité, le radian.



A et B étant deux points situés sur le cercle de centre O, on dit que l'angle au centre $\widehat{AOB}$ $=\alpha$ intercepte l'arc $\widehat{AB}$.

Sur un cercle de rayon R fixé, on sait que la longueur de l'arc est proportionnelle à l'angle au centre α qui l'intercepte. En supposant que le rayon R et la longueur de l'arc sont mesurés avec la même unité, le coefficient de proportionnalité va dépendre du choix de l'unité de mesure de l'angle α.

Vérifier les résultats de l'exercice :

Fraction de cercle (arc) Fraction de tour (angle)	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{a}{2\pi}$	$\frac{b}{360}$
Longueur de l'arc de cercle de rayon R	0	$\frac{\pi R}{6}$	$\frac{\pi R}{4}$	$\frac{\pi R}{3}$	$\frac{\pi R}{2}$	$\frac{2\pi R}{3}$	πR	$\frac{3\pi R}{2}$	$2\pi R$	R	aR	$\frac{b\pi R}{180}$
Longueur de l'arc de cercle de rayon 1	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	1	a	$\frac{b\pi}{180}$
Mesure de l'angle en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	1	a	$\frac{b\pi}{180}$
Mesure de l'angle en degrés	0	30	45	60	90	120	180	270	360	$\frac{180}{\pi}$	$\frac{180a}{\pi}$	b

La correspondance encadrée dans le tableau ci-dessous est à connaître par cœur !

Mesure de l'angle en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Mesure de l'angle en degrés	0	30	45	60	90	120	180	270	360

Conclusion:

- Un arc de cercle de rayon R intercepté par un angle au centre de α radians a pour longueur :
  $L = \alpha R$.
- Un arc de cercle de rayon R intercepté par un angle au centre de α degrés a pour longueur :
  $L=\alpha R\frac{\pi}{180}$.

On voit donc que le radian est une unité adaptée à ce type de problème!

Définition :

Un angle de 1 radian est l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur R sur un cercle de rayon R.
En particulier, sur un cercle de rayon unité, un angle de 1 radian intercepte un arc de longueur unité .

Remarque :

Sur le cercle de centre O et de rayon OA = OB = 1 tel que $\widehat{AOB}$ mesure un radian, alors $\widehat{AOB}$ intercepte l'arc $\widehat{AB}$ de longueur 1. Le segment [AB] a donc ici une longueur AB < 1 : le triangle OAB n'est donc pas tout à fait équilatéral. En effet, on a:

$$1\,rad = \frac{180}{\pi}\deg \approx 57{,}3\,° \qquad \text{et} \qquad 1° = \frac{\pi}{180}\,rad \approx 0{,}017\,rad$$

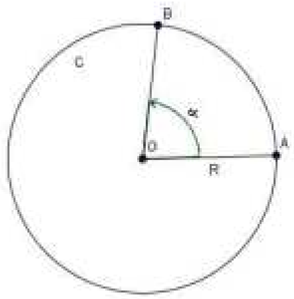
Dans la suite de ce texte l'unité utilisée sera le radian..

Remarque :

En mathématiques, sauf indication contraire, l'unité de mesure des angles est le radian.
Lorsque l'unité de mesure d'un angle n'est pas précisée, il s'agit forcément du radian. C'est le cas en particulier pour les fonctions trigonométriques que nous allons étudier.

Rotation de centre O. Orientation des angles.

Pour définir une rotation de centre O, il est nécessaire de choisir un sens direct autour du point O, et donc d'utiliser des angles orientés.



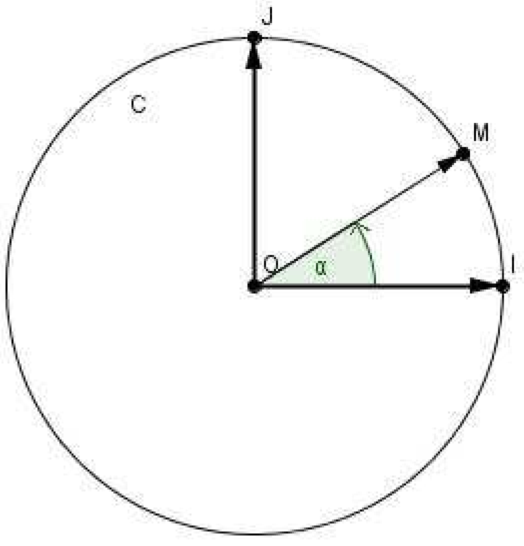
En appelant α l'angle orienté de la rotation de centre O transformant A en B, on a alors: OA = OB = R et $\alpha = (\vec{OA}, \vec{OB})$.

L'angle α est ici l'angle orienté défini par les deux vecteurs associés à la rotation.
Cet angle orienté α intercepte l'arc orienté du cercle.

Remarque :

Le choix implicite du radian comme unité de mesure des angles va jusqu'à l'abus d'écriture toléré et même courant ! Écrire α = π signifie par exemple que l'angle α est plat.
Il y a donc confusion entre l'angle α et sa mesure en radians.

Cercle trigonométrique.

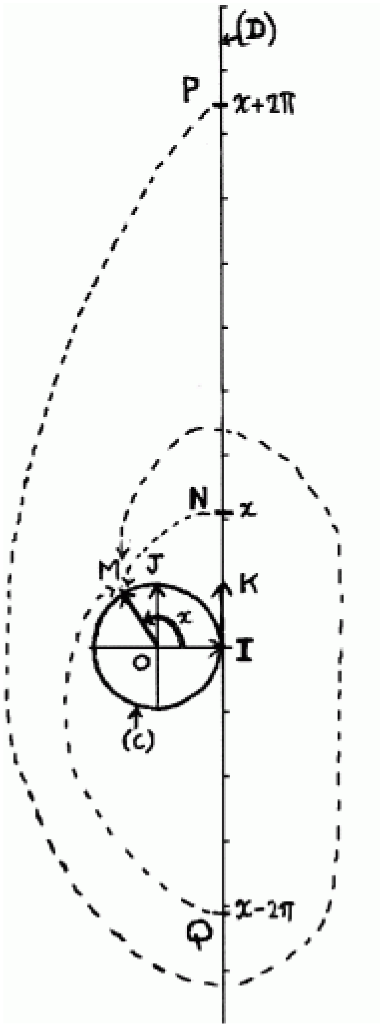


Un cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1, orienté dans le sens direct. On peut donc le munir d'un repère orthonormal de sens direct $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$, c'est à dire que la rotation de centre O et d'angle droit transformant I en J est de sens direct et que les vecteurs $\vec{OI}$ et $\vec{OJ}$ et sont deux vecteurs unitaires.

Le cercle étant de rayon 1, tous les points M du cercle, sont tels que: OM = 1 , donc $\vec{OM}$ est aussi un vecteur unitaire.

Donc, à tout point M du cercle trigonométrique on associe l'angle orienté des deux vecteurs unitaires $(\vec{OI}, \vec{OM})$ qui est l'angle orienté de la rotation de centre O transformant I en M.

Enroulement d’une droite graduée sur le cercle trigonométrique.



(C) est un cercle trigonométrique de centre O.
$(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$ est un repère orthonormal de sens direct.
(D) est la droite tangente à (C) en I.
(D) est munie du repère $(I, \vec{IK})$ tel que $\vec{IK} = \vec{OJ}$.
On enroule la droite (D) autour du cercle (C) dans le sens direct pour les abscisses positives et indirect pour les abscisses négatives.
Ce procédé permet d’associer à tout point N de (D) le point M unique du cercle trigonométrique (C) sur lequel il vient s’appliquer.
Si x est l’abscisse du point N dans le repère $(I, \vec{IK})$ de la droite (D), alors, d’après la définition du radian, le point M de (C) qui lui est associé est tel que : $(\vec{OI}, \vec{OM})$ = x.
Réciproquement, à tout point M du cercle trigonométrique (C), correspond ainsi une infinité de points de la droite (D) : ce sont les points de (D) dont les abscisses sont de la forme $x + k \times 2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.
Sur le dessin ci-contre, on a par exemple :
N d’abscisse $x = x + 0 \times 2\pi$.
P d’abscisse $x + 2\pi = x + 1 \times 2\pi$: 1 tour direct de plus que N.
Q d’abscisse $x - 2\pi = x - 1 \times 2\pi$: 1 tour indirect.

En faisant un nombre entier k de tours dans le sens direct, on obtient : $x + k \times 2\pi$.

De même, en enroulant dans l’autre sens, on obtient: $x - 2\pi$, $x - 4\pi$, ... etc.

Donc, en général: **$x + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$**.

Conclusion :

- A tout réel x correspond un point M unique du cercle trigonométrique (C), c’est à dire un angle $(\vec{OI}, \vec{OM})$ dont le réel x est une mesure en radian.
- A tout point M du cercle trigonométrique (C) , c’est à dire à tout angle $(\vec{OI}, \vec{OM})$ correspond une infinité de réels: x , $x + 2\pi$, $x - 2\pi$, $x + 4\pi$, $x - 4\pi$,......., **$x + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)** qui sont les mesures en radian de l’angle orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$. Ces mesures diffèrent d'un multiple de 2π.
- A tout point M du cercle trigonométrique (C) , c’est à dire à tout angle $(\vec{OI}, \vec{OM})$ correspond un réel unique $x \in]-\pi, \pi]$ qui est la **mesure principale** (en radian) de l’angle orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$.

Exemple :

Un angle de $\frac{17\pi}{3}$ radians a pour mesure principale $-\frac{\pi}{3}$ radians car :

$\frac{17\pi}{3} = \frac{-\pi + 18\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 6\pi = -\frac{\pi}{3} + 3 \times 2\pi$ (3 tours de sens direct, puis $\frac{1}{6}$ de tour indirect)

De plus, $-\frac{\pi}{3} \in]-\pi, \pi]$. $-\frac{\pi}{3}$ radians est donc bien la mesure principale de l’angle de $\frac{17\pi}{3}$ radians.