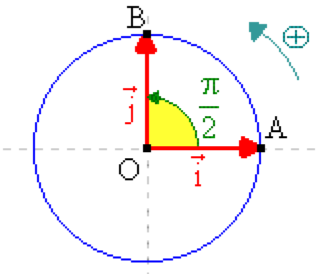
Fonctions trigonométriques



Dans cette leçon, $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ est un repère orthonormal de sens direct.
Les points A et B sont donc sur le cercle trigonométrique de centre O et de rayon 1.

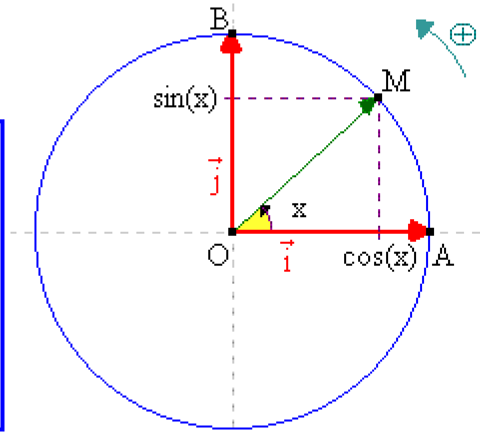
Définition du sinus et du cosinus d'un nombre réel.

A tout réel x, on associe le point M du cercle trigonométrique tel que l'angle orienté $(\vec{i}\,,\overrightarrow{OM})$ mesure x radians.

Cosinus et sinus d'un nombre réel : définition.

Cosinus d'un réel :
Le cosinus du réel x est l'abscisse du point M dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. On le note cos(x).

Sinus d'un réel :
Le sinus du réel x est l'ordonnée du point M dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. On le note sin(x).



Le cosinus et le sinus de x sont donc les coordonnées de M dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

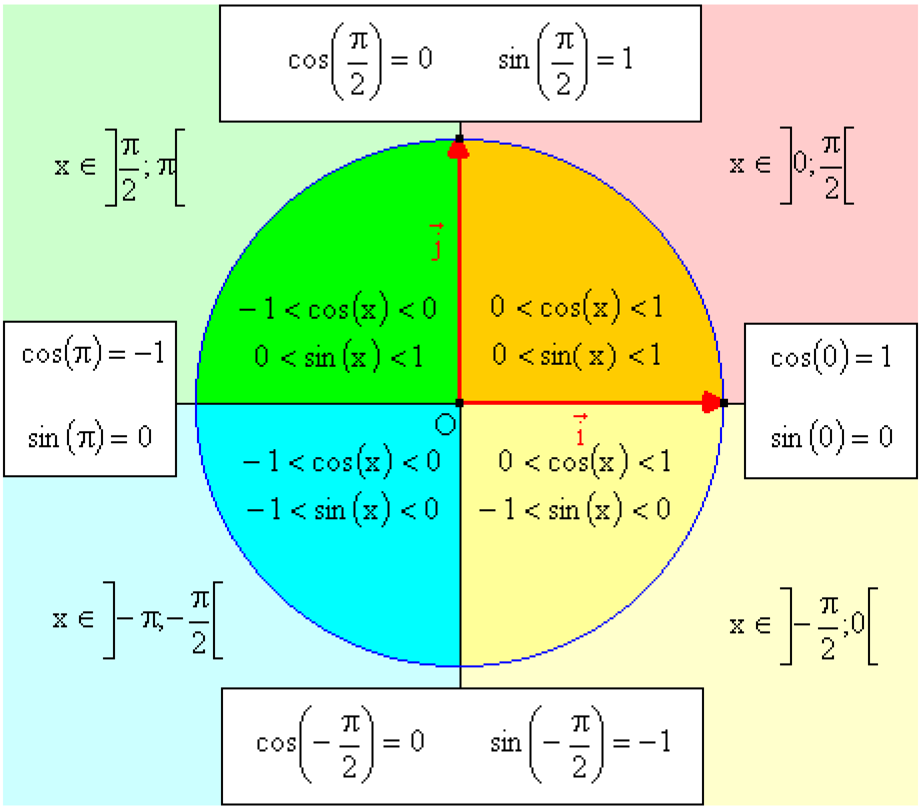
On a: $\boxed{M(\cos x\,;\sin x)}$ c'est à dire : $\boxed{\overrightarrow{OM}=(cox\,x)\vec{i}+(\sin x)\vec{j}}$

Premières propriétés.

- Si x = 0 alors le point du cercle trigonométrique associé à x est le point A(1 ; 0). Donc :
  cos(0) = 1 et sin(0) = 0
- Si x = $\frac{\pi}{2}$, alors le point du cercle trigonométrique associé à x est B(0 ; 1). Donc :
  $$\cos(\frac{\pi}{2})=0 \quad \text{et} \quad \sin(\frac{\pi}{2})=1 \ .$$
- Si x = π , alors x est associé à A'(-1 ;0). Donc :
  $$\cos(\pi)=-1 \quad \text{et} \quad \sin(\pi)=0 \ .$$
- Si x = $-\frac{\pi}{2}$, alors x est associé à B'(0 ;-1). Donc :
  $$\cos(-\frac{\pi}{2})=0 \quad \text{et} \quad \sin(-\frac{\pi}{2})=-1 \ .$$
- Si x est un réel alors pour tout entier relatif k, les réels x et x + 2kπ sont associés au même point M.
  En effet ce sont deux mesures de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OM})$.
  Donc, pour tout nombre réel x et tout entier relatif k, on a:
  cos(x+2kπ) = cox(x)
  sin(x+2kπ) = sin(x)
  On dit que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π , car T = 2π est le plus petit réel strictement positif tel que: cos (x + T) = cos x et sin (x + T) = sin x .
- Le théorème de Pythagore permet de prouver l'égalité:
  $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ que l'on écrit aussi sous la forme: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Signe du sinus et du cosinus.

Par définition, le sinus et le cosinus de tout nombre réel appartiennent à l'intervalle [-1 ; 1].
Plus précisément, la position de M nous permet d'en savoir plus sur le cosinus et le sinus de x. On a :



Cosinus et sinus d'angles remarquables.

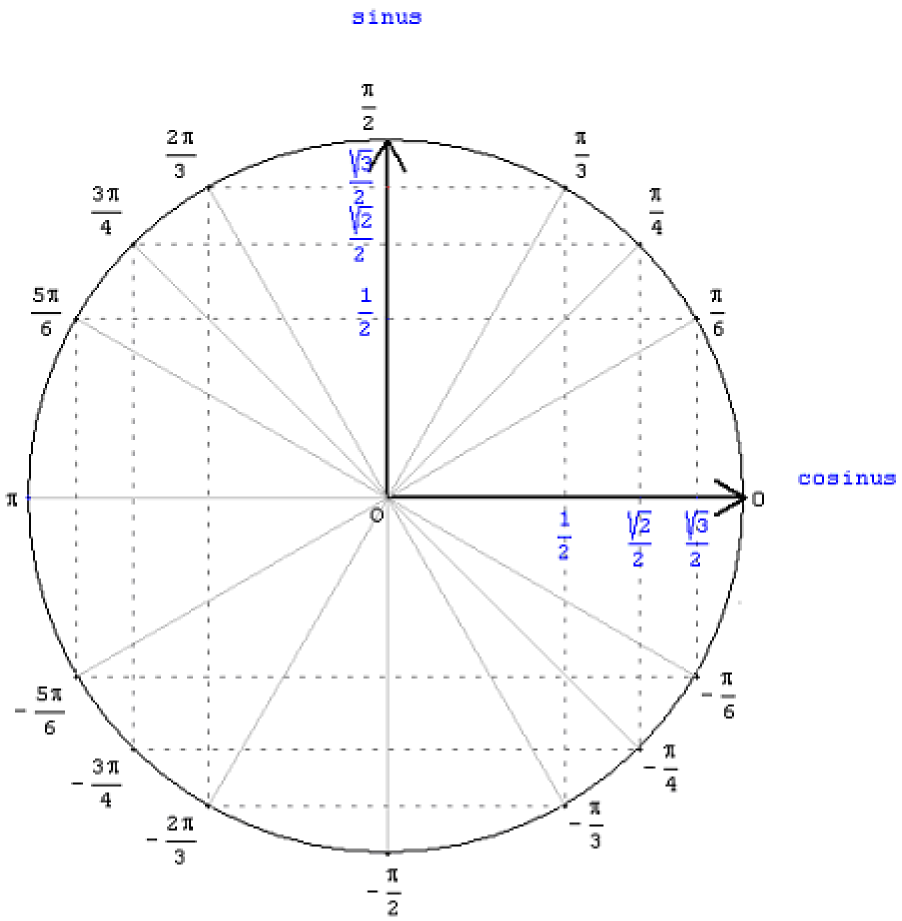
Les exercices faits en classe étudiant les configurations du demi triangle équilatéral et du demi carré ont permis de calculer les valeurs des sinus et cosinus de $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{4}$.

On connaissait déjà ceux de 0, $\frac{\pi}{2}$ et π .

Tous ces résultats à connaître parfaitement sont résumés dans le tableau ci-dessous:

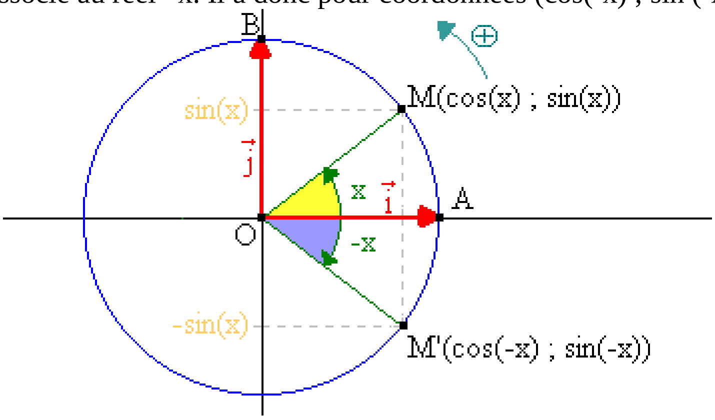
x (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
x (en degrés)	0	30	45	60	90	180
cos(x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sin(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

<u>Visualisation des sinus et cosinus sur le cercle trigonométrique</u>.
C'est un outil indispensable, qu'il est utile de bien visualiser afin d'être capable de retrouver rapidement les valeurs indiquées ci-dessous.



<u>Formules usuelles concernant les angles associés</u>.

Sinus et cosinus de (–x).
On appelle M' le point associé au réel –x. Il a donc pour coordonnées (cos(-x) ; sin (-x)).



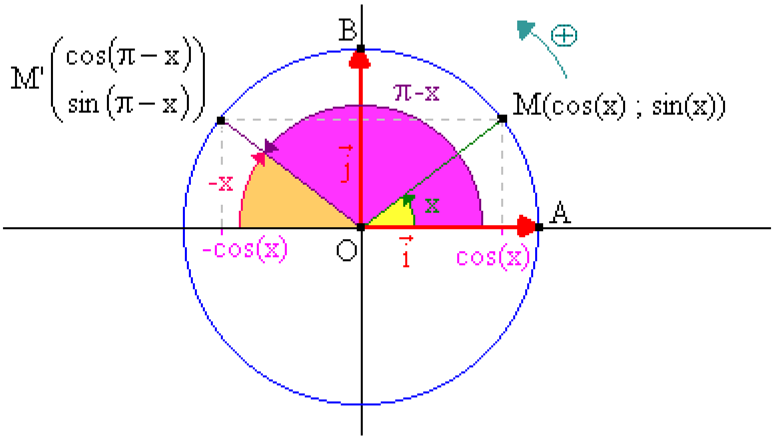
M' est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses. Ces deux points ont donc des abscisses égales mais des ordonnées opposées. Conclusion :

Pour tout réel x, on a: $\cos(-x) = \cos(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$

La fonction cosinus est donc paire et la fonction sinus est impaire.

Cosinus et sinus de π - x et π + x.

On appelle M' le point associé au réel π – x.



On remarque que M' est le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées. Ces deux points ont donc des ordonnées égales mais des abscisses opposées. Conclusion :

Pour tout réel x, on a: $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$

$\sin(\pi - x) = \sin(x)$

Pour π + x , en utilisant les propriétés précédentes, nous pouvons écrire que :

$\cos(\pi + x) = \cos(\pi - (-x)) = -\cos(-x) = -\cos(x)$.

$\sin(\pi + x) = \sin(\pi - (-x)) = \sin(-x) = -\sin(x)$.

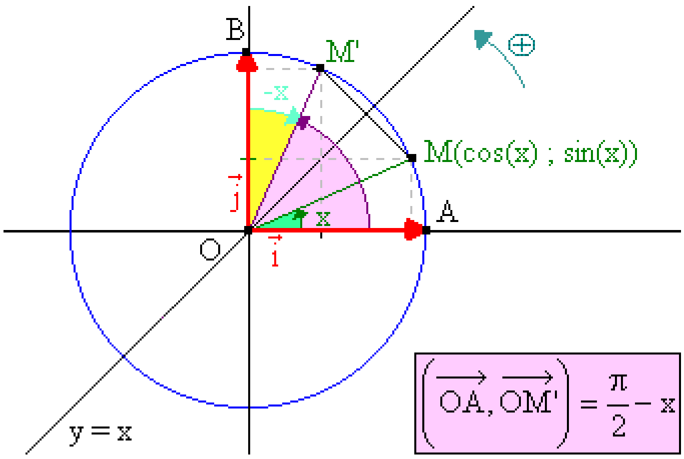
Conclusion :

Pour tout réel x, on a: $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$

$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$

Cosinus et sinus de $\frac{\pi}{2} - x$ et $\frac{\pi}{2} + x$.

M est toujours le point du cercle trigonométrique associé au réel x. On note M' le point associé au réel . $\frac{\pi}{2} + x$



M' est ici le symétrique de M par rapport à la droite d'équation y = x. C'est à dire la première bissectrice du repère du plan. L'abscisse du point M' est égale à l'ordonnée de M et l'ordonnée de M' est l'abscisse de M.

Conclusion :

Pour tout réel x, on a: $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin(x)$

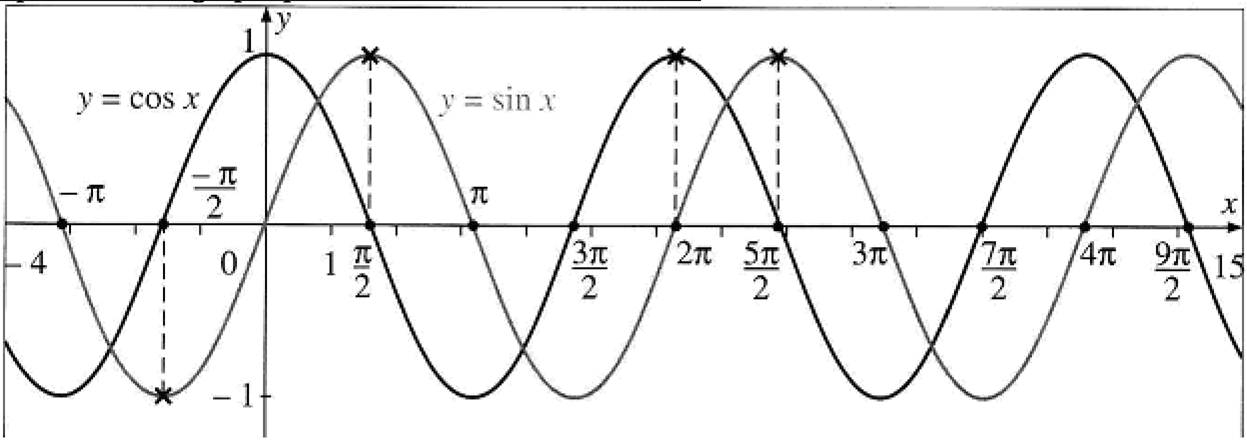
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$

On montre facilement par le calcul *(à faire en exercice)* que:

Pour tout réel x, on a: $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$

Représentations graphiques des fonctions sinus et cosinus



Exercice

Réaliser ci-dessous les tableaux des variaions des fonctions cosinus et sinus sur l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$